Regina Bruder

Eine akzentuierte Aufgabenauswahl und Vermitteln heuristischer Erfahrung –Wege zu einem anspruchsvollen Mathematikunterricht für alle

Viele Probleme und Schwierigkeiten des Mathematikunterrichts bis hin zur Lehreraus- und -fortbildung wurden und werden erst nach TIMSS ernst bzw. überhaupt zur Kenntnis genommen. Dazu gehört auch das Problem, wie es gelingen kann, dass sich SchülerInnen erfolgreicher als bisher mit nicht (schematisch) eingeübten Aufgaben auseinandersetzen wollen und können. Im Unterrichtsalltag ist die Verführung groß, sich auf bestimmte Standardaufgaben zurückzuziehen, die systematisch trainiert werden - und das passiert mit und ohne Zentralabitur im Hinterkopf!
Inzwischen ist das "Öffnen von Aufgaben" |1| stärker ins Bewusstsein gerückt und kann sicherlich einige Flexibilität und sogar Kreativität in den Unterricht bringen. Leistungsstärkere SchülerInnen werden dadurch gefördert, was m.E. dringend notwendig ist, weil sich auch eine mathematische Begabung nicht einfach von selbst durchsetzt!
Neben diesem positiven Effekt bleibt aber zu fragen, welche Chancen die Mehrheit der SchülerInnen erhält, mit den Anforderungen "offener Aufgaben" zurechtzukommen und so ihr mathematisches Wissen und Können deutlich weiterzuentwickeln?
Der Terminus "offene Aufgabe" wird in der aktuellen Diskussion zur Verbesserung der Unterrichtskultur verwendet, weil wohl in den Vorstellungen vieler LehrerInnen und DidaktikerInnen ein enger Aufgabenbegriff vorherrschend ist, - vgl. auch die damals berechtigte Kritik von Lenné an der "Aufgabendidaktik" bei der Sicht auf Aufgaben in den sechziger Jahren |2|. Fasst man dagegen Aufgaben prinzipiell viel weiter auf, nämlich als *Aufforderungen zum Lernhandeln* |3|, erübrigt sich der Zusatz "offen"! Diese Art von Aufgabenstellung ergibt sich dann als eine von acht möglichen, wenn man alle Varianten einer Belegung der drei Komponenten einer Aufgabe aus dem Blickwinkel der SchülerInnen auflistet. Unter den *Komponenten* einer Aufgabe sollen hier verstanden werden:

1. Die *Anfangssituation*:Voraussetzungen, gegebene Größen, Informationen zu einem Sachverhalt o.ä.
2. *Transformationen*, die die Anfangssituation in die Endsituation überführen, bzw. die von dem Gegebenen zum Gesuchten hinführen: Lösungsweg(e), mathematische Modelle, Beweiskette...
3. Die *Endsituation*:Gesuchtes, Behauptung, Schlussfolgerungen, Resultate usw.

Mit *Komponentenbelegung* ist die Antwort auf die Frage gemeint, ob alle erforderlichen Größen oder Voraussetzungen bekannt sind (x), oder nicht (-) – ob ein Lösungsweg bekannt, genannt oder bereits vorgegeben ist (x) , oder nicht (-) – ob die (bislang immer oder "üblicherweise") zu berechnenden Grössen oder die Behauptung bereits vorgegeben sind (x)– oder nicht (-).
Der Einfachheit halber soll hier nur zwischen belegt/bekannt (x) und nicht bekannt(-) unterschieden werden. Dann ergeben sich folgende acht Kombinationen und damit acht Aufgabentypen, die sich in ihrem Handlungsziel doch recht deutlich voneinander unterscheiden.

	Anfangs-situation (Gegebenes)	Transformationen (Lösungsweg(e))	Endsituation(en) (Ziel)
vollständig gelöste Aufgabe (trivial)	x	x	x
Grundaufgabe	x	x	-
Umkehrung einer bekannten Grundaufgabe	-	x	x
Begründungs- oder Beweisaufgabe bzw. Strategiefindungsaufgabe	x	-	x
Problemaufgabe	x	-	-
Umkehrung einer Problemaufgabe (spezielle “offene” Aufgabe)	-	-	x
Aufforderung zum Erfinden einer Aufgabe zu einem gegebenen mathematischen Thema	-	x	-
Problemsituation (“offene” Aufgabe)	-	-	Rahmen oder Orientierung (-)

Zur Erläuterung dieser Aufgabentypisierung jeweils ein Beispiel:

Eine Grundaufgabe:	Löse die quadratische Gleichung $3x - 7x = 8$
Umkehrung:	Gib eine quadratische Gleichung an mit den Lösungen 2 und –3 !
Begründungs- oder Beweisaufgabe bzw. Strategiefindung:	Beim Nimm-Spiel gewinnt Frank immer. Wie macht er das?
Problemaufgabe:	Ist eine Tetrapak-Milchtüte verpackungsoptimal gestaltet?
Umkehrung einer Problemaufgabe:	Ein dreieckiger Teich soll eine Fläche von 10m einnehmen. Welche Maße kann er haben?
Aufforderung zum Erfinden von Aufgaben:	Erfinde Beispielaufgaben zu den drei typischen Fragestellungen der Prozentrechnung!
Problemsituation:	Prinzessin aus dem Märchen vom Froschkönig: Warum *musste* Ihre goldene Kugel ins Wasser fallen?

Diese Aufgabentypisierung ist geeignet um zu prüfen, wie vielseitig oder auch wie kopflastig sich der eigene Unterricht hinsichtlich der Aufgabenauswahl darstellt! Leider bieten die Lehrbücher hierfür trotz einiger motivationsorientierter Verbesserungen noch immer nicht genügend Unterstützung, eine Kopflastigkeit in den Grundaufgaben abzubauen und die “Lücken” in den Aufgabenangeboten von den *Grundaufgaben*, deren Abwandlungen insbesondere in Form von *Umkehrungen* über Erweiterungen und Verknüpfungen von Grundaufgaben bis hin zu *Problemaufgaben* und *Problemsituationen* zu schliessen.
Eine **Grundidee veränderter Aufgabenkultur** beinhaltet also zunächst erst einmal **Ausgewogenheit** in den genannten Aufgabentypen. Wenn diese Aufgabentypen im Unterricht nicht in angemessenen Anteilen (das bedeutet keineswegs gleich-gewichtig!) vorkommen, haben viele SchülerInnen kaum reale Chancen, fundamentale Ideen der Mathematik und Wege und Möglichkeiten für Anwendungen von Mathematik zu erfahren und zu verstehen. Sicherlich hängt das auch noch entscheidend davon ab, womit die hier benannten Aufgabenstrukturen inhaltlich gefüllt werden – also die Beantwortung der Frage nach den Handlungsinhalten. Dennoch bilden diese Aufgabentypen indirekt bereits wesentliche Arbeitsweisen der Mathematik ab (Modellbildung, Beweisen, Herleiten, auch Algorithmieren).

Nach den bisherigen Unterrichtserfahrungen zu diesem Modell hat sich eine Zeitaufteilung von 1:2 für den Anteil der Grundaufgaben als elementare Bestimmungsaufgaben im Verhältnis zu den Umkehrungen, Erweiterungen und Verknüpfungen von Grundaufgaben sowie zum Erfinden von Aufgaben bewährt. Für Problemaufgaben und Problemsituationen sollte mindestens genauso viel Zeit eingeplant werden wie für das Bearbeiten der Grundaufgaben in der Stoffneuerarbeitung vorgesehen wird.

Die zweite Grundidee veränderter Unterrichtskultur geht jedoch noch wesentlich über die Art der Aufgabenauswahl hinaus. Selbst bei vielseitigster und ausgewogenster Aufgabenauswahl ergeben sich folgende Fragen:
Reicht es tatsächlich aus, die SchülerInnen lediglich mit einer vielleicht individueller lösbaren anderen Art von Lernanforderungen zu konfrontieren (wenn nicht mehr ein bestimmter Lösungsweg erwartet oder gar vorgeschrieben wird) und dann einfach zu hoffen, dass diese auch bewältigt werden? Wie kann ein (natürlich immer individueller) Leistungszuwachs beim Problemlösen mit mathematischen Mitteln im Sinne des oben beschriebenen Aufgabenverständnisses erreicht werden?

Unterbestimmte Aufgabensituationen oder nachträgliches Öffnen zunächst vorstrukturierter Aufgaben bieten Spielräume für Lösungsansätze. Aber kennen die SchülerInnen auch die Spielregeln? Haben sie im Mathematikunterricht Gelegenheit erhalten, entsprechende Qualifikationen für das Füllen dieser Spielräume erwerben zu können? Folgender m.E. zentraler Zusammenhang solllte deshalb sorgfältig durchdacht und beachtet werden:

“ Im Unterricht nicht nur Lernanforderungen stellen, sondern auch zu deren Bewältigung befähigen”.

Was könnte das sein, was SchülerInnen außer einer entsprechenden Lerneinstellung benötigen (das ist allein schon problematisch genug – hier aber nicht das Thema) und deshalb lernen sollten, um Problemsituationen oder “offene” Aufgaben individuell erfolgreicher zu bewältigen? Eine Antwort darauf lautet:
Neben einem flexiblen und vernetzten Grundwissen und entsprechendem Können werden **fachspezifische und allgemeine Methoden und Techniken zum Problemlösen** mit mathematischen Mitteln benötigt. Dieser Bereich wird auch mit ***“heuristischer Bildung”*** umschrieben.
Heuristischer Erfahrungsgewinn bedeutet einen Zuwachs an Methodenwissen und Methodenbeherrschung auf einer Metaebene - nämlich als individuell verfügbares Auswahlfeld möglicher Vorgehensweisen beim Problemlösen mit mathematischen Mitteln. Heuristische Bildung umfasst als Lerngegenstände etwa folgende Strategien, Prinzipien und Hilfsmittel:

Heuristische Vorgehensweisen	**Heuristische Hilfsmittel**
Allgemeine Prinzipien:	
- Analogieprinzip	- informative Figuren (Skizze)
- Rückführungsprinzip	- Tabellen, - Lösungsgraphen
- Transformationsprinzip	- Wissensspeicher
	- strukturierte Textdarstellung

Spezielle Prinzipien:
- Symmetrieprinzip, - Extremalprinzip, - Invarianzprinzip |4|,- Zerlegungsprinzip
- Arbeiten mit Spezialfällen, - Rekursionsprinzip

Strategien:
- Vorwärts und Rückwärtsarbeiten und Descartessches Schema
- Systematischen Probieren

Regeln:
(für bestimmte Aufgabenklassen - z.B. Methode der Ortslinien bei Konstruktionsaufgaben)

Diese Auflistung lehnt sich an Darstellungen bei Polya |5| an und Teile davon findet man im Zusammenhang mit der Analyse von mathematischen Wettbewerbs-aufgaben z.B. bei Sewerin |6|. Diese Prinzipien können jedoch auch in Verbindung mit dem üblichen Schulstoff transparent und damit allen SchülerInnen zugänglich gemacht werden, vgl. |7|.
Heuristische Methoden und Techniken unterscheiden sich mehrfach von den üblichen mathematischen Begriffen, Sätzen und Verfahren. Auffälligstes Merkmal: Es gibt bei ihrer Anwendung keine Lösungsgarantie!
Es geht auch nicht darum, diese Methoden und Techniken bewusst und abrufbereit zu "beherrschen"! Sie sind keine Denkschemata und nicht mit auswendiggelernten Rezepten zu verwechseln. Heuristische Bildung ist ein langfristig anzulegender Prozess. Der lernpsychologische Hintergrund heuristischen Erfahrungsgewinns lässt sich knapp wie folgt umreißen:
- Jede geistige Handlung ist durch mehr oder weniger bewusste Ziele und Motive, Inhalte und einen bestimmten Verlauf gekennzeichnet. Der Handlungsverlauf kann u.a. mit solchen Verlaufseigenschaften beschrieben werden wie Planmäßigkeit, Zielgerichtetheit, Beweglichkeit, Exaktheit u.a. |8|
- Heuristische Bildung versteht sich in diesem Zusammenhang als Mittler zur teilweisen Kompensation weniger gut ausgeprägter geistiger Beweglichkeit über eine höhere Ziel- und Methodenbewusstheit.
Es lassen sich i.w. vier Erscheinungsformen geistiger Beweglichkeit beim Problemlösen mit mathematischen Mitteln feststellen:

- Reduktion
- Reversibilität (Umkehren von Gedankengängen)
- Aspektbeachtung (Gleichzeitiges Beachten mehrerer Aspekte, oder die Abhängigkeit von Dingen erkennen und gezielt variieren)
- Aspektwechsel (Wechseln von Annahmen oder Kriterien; Umstrukturieren eines Sachverhalts)

Durch heuristische Bildung können Verlaufsqualitäten des Denkens gefördert werden:

Reversibilität — Vorwärts- Rückwärtsarbeiten
Arbeiten mit "Umkehraufgaben" zur eigentlichen Stoffvermittlungsrichtung
Sind die gegebenen Größen bereits Ergebnisse von Operationen, so versuche, die zu diesem Resultat hinführenden Gedankengänge umzukehren!

Aspektbeachtung — Descartessches Schema
Invarianzprinzip
Extremalprinzip

	Symmetrieprinzip Fallunterscheidung Systematisches Probieren *Suche in Unterschiedlichem das Gemeinsame!* *(Relativität erfassen oder mehrere Aspekte gleichzeitig!)*
Aspektwechsel	kombiniertes Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten Übergang in eine Modellebene - Transformationsprinzip *Variiere die Bedingungen!* *Betrachte Gegebenes und Gesuchtes in verschiedenen Zusammenhängen!* *Zerlege oder verknüpfe mit Neuem!* *Suche nach anderen mathematischen Beschreibungsmöglichkeiten für das Gegebene und Gesuchte!*

Die Didaktik der heuristischen Bildung umfasst für jedes heuristische Element folgende drei Phasen bis zu ihrer Verinnerlichung:

<u>Gewöhnen:</u>
Fragestellungen und Aufforderungen orientieren sich an den jeweiligen heuristischen Elementen; SchülerInnen nutzen bestimmte Vorgehensweisen unbewusst - vgl. die kursiv geschriebenen Impulsfragen weiter oben!

<u>Bewusstmachen</u>
Anhand markanter Beispiele wird - meist in einer Reflexionsphase - das jeweilige heuristische Element bewusst beschrieben und diskutiert - evtl. erfolgt auch eine Namensgebung für das Element.
Schüler lernen verallgemeinerte Fragestellungen für die Anwendung des heuristischen Elements kennen.

Beispiel:
Wenn ich mir ein geometrisches Problem veranschaulichen will, dann versuche ich, gegebene und gesuchte Größen innerhalb einer mir bekannten Figur (z.B. rechtwinkliges Dreieck, Strahlensatzfiguren, mit Hilfe besonderer Linien im Dreieck und am Kreis) miteinander in Beziehung zu setzen.

<u>Zeitweilig bewusstes Anwenden</u>
Üben des bewusstgewordenen heuristischen Elementes anhand spezieller Aufgaben und Aufforderung zum Argumentieren mit dem Element insbesondere in der Auswertungsphase zu komplexen Aufgaben.

Das langfristige Ziel heuristischer Bildung lautet: Unterbewusstes Nutzen heuristischer Elemente als Kompensation mangelnder intuitiver geistiger Beweglichkeit.
In diesem Verständnis kann heuristischer Erfahrungsgewinn allen SchülerInnen neue Türen aufstoßen! Leistungsschwächere erleben Fortschritte in Anforderungsbereichen, die sie bisher oft frustrierten (z.B. bei Anwendungsaufgaben – Lernbereitschaft allerdings immer vorausgesetzt) und Leistungsstärkeren öffnen sich neue Horizonte, wenn sie z.B. Verbindungen zwischen bislang für sie völlig nebeneinanderstehenden mathematischen Gebieten oder Fragestellungen entdecken.
Heuristischer Erfahrungsgewinn wird dann möglich, wenn es gelingt, langfristig und

stetig einen Unterrichtsstil zu pflegen, der die SchülerInnen in spezifische Anforderungssituationen versetzt. Dazu gehört zum Beispiel:

- *Teilhandlungen des Problemlösens werden für sich eingeübt, um sie anschließend wieder in neuen Zusammenhängen als nützlich zu erfahren und hier nutzen zu lernen.*

- *Die Handhabung spezifischer heuristischer Hilfsmittel für einige dieser Teilhandlungen wie informative Figur, Tabelle und Lösungsgraphen wird an überzeugenden Beispielen vorgestellt - ggf. von SchülerInnen, die diese Hilfsmittel bereits intuitiv verwenden.*
- *Wo immer möglich und sinnvoll wird nach verschiedenen Lösungswegen gefragt, die dann nicht nur auf ihre mathematische Zulässigkeit geprüft, sondern auch hinsichtlich Zweckmäßigkeit und Effektivität verglichen werden. Vor allem müssen unterschiedliche Zugänge zu einer Aufgabe oder Blickwinkel zugelassen und gefördert werden.*
- *Phasen angestrengter Auseinandersetzung mit mathematischen Fragestellungen werden mit einer Reflexion der Resultate und der Lösungswege bzw. -ideen abgeschlossen, in denen es um ein Bewusstmachen spezieller erfolgreicher Vorgehensweisen aber auch ein Bewusstwerden von Aufgabenlöseerfahrung durch Verallgemeinerungen bei den SchülerInnen geht.*
-

Beim Sprechen über Aufgaben und deren Lösungswege besteht die Möglichkeit, Schlüsselerfahrungen für den Umgang mit Mathematik bzw. ein Problemlösen mit mathematischen Mitteln zu gewinnen. In einer solchen Reflexion werden Vorgehensweisen als nützlich erkannt, die man intuitiv vielleicht schon sporadisch eingesetzt hat, deren man sich überhaupt nicht bewusst war oder auf die man selbst wohl nie gekommen wäre. Wenn sich an eine solche bewusst gewordene Aufgabenlöseerfahrung spezifische Übungen anschließen (möglichst punktuell und über einen größeren Zeitraum verstreut), in denen die breite Anwendbarkeit der jeweiligen Vorgehensweisen oder Hilfsmittel besonders eindrucksvoll erfahren werden kann, dann ist langfristig mit größeren Erfolgen beim selbständigen Anwenden von Mathematik und auch beim Verstehen mathematischer Modellbildungen zu rechnen. Für die Unterrichtsplanung heißt das allerdings, dass man neben einer Logik des Stoffes und seinen Anwendungen noch in Gedanken spiralförmig heuristische Vorgehensweisen und Hilfsmittel verfolgt. Spiralförmig deshalb, weil an immer neuen Unterrichtsgegenständen bereits erfahrene Heuristik erinnert und angereichert werden kann oder weil einzelne der bisher nur unbewusst und sporadisch genutzten Vorgehensweisen jetzt für ein Bewusstmachen reif und geeignet sind.
Das soll im folgenden exemplarisch anhand des Extremalprinzips erläutert werden.

Wie oft werden im Alltag Formulierungen verwendet wie: Etwas mit geringstem Aufwand aber höchstem Effekt erreichen; um einen Konsens zu finden, wird erstmal der “kleinste gemeinsame Nenner” ermittelt; man sucht nach der günstigsten Geld-anlagemöglichkeit oder Versicherung usw. und schließlich nach dem “idealen” Partner ...
Letzteres greift wohl doch etwas weit und lässt sich mit den Mitteln der Mathematik schwerlich beschreiben. Grundideen des Extremalprinzips haben jedoch tiefe Wurzeln im Alltagsdenken. Wir wollen dieses Prinzip folgendermaßen umschreiben:

Das Extremalprinzip orientiert auf das Suchen nach Erfüllungsmengen für Randbedingungen der Problemstellung bzw. nach extremen Fällen unter mehreren möglichen.

SEWERIN versteht unter diesem auch als Auswahlprinzip gekennzeichneten Vorgehen das Auswählen eines größten, kleinsten oder sonstwie am Rande liegenden Elementes, falls in der Aufgabenstellung eine gemeinsame Eigenschaft der Elemente einer endlichen Menge behandelt wird |6|.
Im Mathematikunterricht lassen sich vielfältige Beispiele finden, diese Denkweise auszubilden und zu unterstützen:
Beispiel aus Kl. 5/6.:

Für den Flächeninhalt A eines Rechtecks gilt $30\ cm < A < 36\ cm$?
Gib fünf ganzzahlige Maße für die Seiten eines solchen Rechtecks an!

Lösungsidee: Unter der Voraussetzung, dass die Seitenlängen ganzzahlige Maßzahlen erhalten sollen, wird nach Mindest- und Höchstgröße gesucht. Es ergibt sich eine “Spannweite” von $a = 1$ cm und $b = 35$ cm bis $a = 5$ cm und $b = 7$ cm. Mit diesen Zahlenpaaren kann man das systematische Probieren (in einer Tabelle) starten bzw. rahmen.

Typische Fragestellungen aus dem Mathematikunterricht, zu deren Beantwortung das Suchen nach Randbedingungen bzw. Extremfällen hilfreich sein kann, sind:

Unter welchen Bedingungen gilt ein Zusammenhang ...?
oder: Welche Mindestbedingung (Randbedingung) muss erfüllt sein?
Wieviele Möglichkeiten gibt es, eine gegebene Bedingung zu erfüllen? Wieviele Schritte sind höchstens (oder mindestens) nötig, um eingegebenes Problem zu lösen? Oder: Wo habe ich die besten Chancen? (Spiele, Lotto)
Wo liegt das Optimum?(min. Material- oder Zeitaufwand, max. Gewinn)

Beispielaufgaben:

- *Unter welchen Voraussetzungen für a, b und c besitzt die Funktion $f(x) = ax + bx + c$ genau eine Nullstelle?*
- *Ist die Anordnung der Ferrero-Küßchen in der quaderförmigen Zweischicht-packung verpackungsoptimal?*
- *Wie kann man mit einem Stück Draht bekannter Länge an einer Hauswand ein möglichst großes Blumenbeet abstecken?*

Aber auch:
Im Freigehege laufen Hasen und Hühner. Es sind 12 Köpfe zu zählen und 36 Beine. Wieviele Hasen und Hühner sind es?

Hier kann die Idee der “Minimalbedingung” vielleicht eher zu einer schnellen Lösung führen als das - allgemeinere - Suchen nach Invarianten, vgl. zum Invarianzprinzip auch |4|.

Unterrichtsbezüge für die Hintergrundideen des Extremalprinzips sind:

Kl. 5/6 ggT und kgV berechnen
Maße finden für Figuren mit vorgegebenen Bedingungen (siehe oben)

Kl. 7/8 funktionale Überlegungen– Optimierungsansätze und –ideen , vgl. auch die Beispiele zum Kräutergarten und zu Konfektverpackungen in |9|

Kl. 9 Einführung in die Wurzelrechnung:
Welchen Umfang hat eine Fläche von 2 m ?
(die Quadratwurzel wird benötigt beim Quadrat und beim Kreis)
Quadratwurzelberechnung durch Intervallschachtelung – hier werden die “Randpunkte” immer wieder neu bestimmt

Behandlung von Gleichungssystemen in Verbindung mit “Treffpunktaufgaben” und als Weiterung: Lineare Ungleichungssysteme

Kl. 11/12 Optimierungaufgaben: 1 l Volumen soll “verpackt” werden!
Es sind Bedingungen für eine minimale Oberfläche bei verschiedenen vorgegebenen Körperformen zu finden!

Dieses Problem ist auch als Einstieg in Anwendungen zur ersten Ableitung sehr gut geeignet. Bei der Fragestellung: “Welche Maße müsste eine zylinderförmige Dose haben, wenn bei gegebenem Volumen die Umverpackung minimal sein soll?” gehen die Schüler/innen aufgrund ihres bisherigen mathematischen Kenntnisstandes zunächst intuitiv vor. Es werden Maße vorgegeben,variiert, Wertetabellen aufgestellt – Anwendungen des Extremalprinzips.
Eine Reduktion des Problems auf die Abhängigkeit der Oberfläche von nur einer Variablen wird schließlich als zweckmäßig erkannt – ein wichtiger Aspekt geistiger Beweglichkeit. Man kann jetzt die Funktionskurve – z.B. A=f(r) zeichnen (grafikfähige Taschenrechner bieten entsprechende Unterstützung) und ein Minimum ablesen. Eine Berechnungsmöglichkeit bietet schließlich die erste Ableitung.
Als Ergebnisdarstellung zu dem allgemeinen Verpackungsproblem bietet sich eine “Hitliste” der Körperformen an. Die Einzelberechnungen können im Rahmen eines kleinen Unterrichtsprojektes arbeitsteilig von den SchülerInnen vorgenommen werden. Durch die unterschiedlichen Schwierigkeiten bei der Gewinnung der erfoderlichen Funktionsgleichungen ist eine solche Aufgabenstellung auch selbstdifferenzierend. Folgende Ergebnisse sind dann für das gebene Volumen von 1Liter (Wasser, Milch o.ä.) zu erwarten (reine Körperform - keine Falzkanten beachtet):

Dazu können noch untersucht werden: Prisma mit dreieckiger und viereckiger Grundfläche sowie eine regelmäßige Pyramide mit quadratischer Grundfläche.

Literaturverzeichnis

|1| Köhler, R.: TIMSS und die Folgen: Was kann man in der Praxis ändern? - In: TIMSS und der Mathematikunterricht. Schroedel 1998. S. 42

|2| Lenné, H.: Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland. Stuttgart 1969

|3| Vgl. dazu ausführlich: Bruder, R.: Grundfragen mathematikdidaktischer Theoriebildung unter besonderer Berücksichtigung des Arbeitens mit Aufgaben. Anlage III. - Diss. B. Potsdam 1988

|4| Bruder, R.: Im Mathematikunterricht heuristische Erfahrung gewinnen -am Beispiel des Invarianzprinzips. - In: Beiträge zum Lernen und Lehren von Mathematik. Festschrift zur Emeritierung von Martin Glatfeld. Seelze 1994, S. 18-26

|5| Polya, G.: Schule des Denkens. Berlin 1949

|6| Sewerin, H.: Mathematische Schülerwettbewerbe. München 1979 (1990) 12, S. 876-886.

|7| Bruder,R.; Müller, H: Heuristisches Arbeiten im Mathematikunterricht beim komplexen Anwenden mathematischen Wissens und Können. - In: Math. Schule, Berlin 28

|8| Vgl. dazu u.a.: Lompscher, J.: Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Entwicklung geistiger Fähigkeiten. Berlin: Volk und Wissen 1972.

|9| Bruder, R.:Kräutergarten und Konfektverpackung - Optimieren in einer 8.Klasse. In:mathematik lehren 81(1997), S. 11 - 16.