Methoden und Techniken des Problemlösenlernens

Regina Bruder

Januar 2003

Prof. Dr. Regina Bruder
TU Darmstadt, FB Mathematik
AG Fachdidaktik der Mathematik Januar 2003

Methoden und Techniken des Problemlösenlernens

Gliederung

Methoden und Techniken des Problemlösenlernens

1. Problemlösen erlernen im Mathematikunterricht – ein Ziel für alle?

Wenn man die Frage anders stellt und nach den Gründen fragt, die einen Mathematikunterricht als allgemeinbildend qualifizieren und damit auch „für alle“ legitimieren, dann wird „Problemlösen“ zu einem Eckpfeiler in der Argumentation. Folgende drei Grunderfahrungen beschreiben nach Winter(1995) den allgemeinbildenden Anspruch des Mathematikunterrichts:

- Erscheinungen der Welt um uns ... in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen;
- mathematische Gegenstände ... als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen;
- in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten (heuristische Fähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen) zu erwerben.

Winter beschreibt mathematisches Problemlösen auch als Sammeln von Erfahrungen zum eigenen Denken. Die aus PISA-2000 hinreichend bekannte Apfelbaumaufgabe kann dieses Anliegen illustrieren.
Dabei geht es um Apfelbäume, die jeweils im quadratischen Muster gepflanzt werden und von Nadelbäumen als Windschutz umsäumt werden sollen. Thematisiert werden mehrere funktionale Abhängigkeiten: Zwischen Musternummer und Apfelbaumanzahl (eine Quadratzahl), zwischen Musternummer und Nadelbaumzahl (lineare Abhängigkeit) und zwischen dem Maß des Quadratrasters (Apfelbäume) und der Anzahl der umschließenden Nadelbäume.

Um die jeweiligen Bildungsvorschriften und Zusammenhänge zu verstehen, müssen Informationen strukturiert, neu geordnet werden. Es geht aber auch um das Erfassen funktionaler Abhängigkeiten zwischen dem „Inneren“ und dem „Äußeren“. Solche Beziehungen zwischen „Inhalt und Rand“ bzw. „Fülle und Hülle“, wie Winter(2003) das beschreibt, führen einerseits auf tiefliegende mathematische Probleme wie das isoperimetrische Problem (Kreis als größte Fläche bei gegebenem Umfang, in dreidimensionaler Analogie dazu ist es die Kugel) und andererseits auf die beachtliche praktische Bedeutung der Lösung dieser Probleme. Erst mit Hilfe einer mathematischen Durchdringung gelingt ein vertieftes Verständnis von Alltagsbeobachtungen, z.B. dieser: Ein Elefant, der von seiner Körperform einer Kugel doch viel näher kommt als beispielsweise die meisten Menschen, benötigt seine riesengroßen Ohren, um seine Körperoberfläche zu erhöhen, da über die Haut die gesamte und lebenswichtige Wärmeregulierung erfolgt.
Die Apfelbaumaufgabe ist allerdings überhaupt nicht praxisnah formuliert, kein Gärtner würde auf solche Ideen kommen. Dennoch steckt in ihr ein großes Potential, Denkerfahrungen zu sammeln im Sinne von zentralen Fragestellungen und deren Alltagstransfer und im Kennenlernen bzw. Verwenden typischer

mathematischer Arbeitsweisen, die erst diese alltagsrelevanten Einsichten ermöglichen. Und in diesem Sinne ist Problemlösen – sowohl im innermathematischen wie auch im außermathematischen Kontext - ein wertvolles allgemeinbildendes Lernziel für alle Schülerinnen und Schüler.

Mit Bezug auf Polya[1](1965) wird dem Mathematikunterricht oft die Funktion zugesprochen, Heurismen des Problemlösens zu entwickeln. Damit wird die Hoffnung und Erwartung verbunden, dass generalisierbare Kompetenzen aufgebaut werden, die auch über die Schule hinaus als Basis für lebenslanges Lernen dienen können. In unserem Apfelbaumbeispiel würden solche heuristischen Hilfsmittel wie das Aufstellen einer Zuordnungstabelle und das Umgehen mit Variablen (Aufstellen von Termen) beim Verstehen und Lösen der Aufgabe helfen können. Insbesondere für leistungsschwächere Lernende sind solche Hilfsmittel besonders wertvoll, weil sie in ungewohnten Lernsituationen zwar keine Lösungsgarantie aber doch eine Orientierung ermöglichen.[2]

So weit die Ergebnisse der OECD-Studien TIMSS und PISA bisher entsprechende Aussagen überhaupt zulassen, scheinen wir von solchen generalisierbaren Kompetenzen unserer Schülerinnen und Schüler doch noch weit entfernt zu sein. Schwierigkeiten bereiten insbesondere komplexere Aufgaben, die konzeptuelles Verständnis voraussetzen oder bzw. und eine flexible Anwendung des Wissens verlangen, vgl. Baumert u.a. (1997).

Entsprechende Lernanforderungen werden im englischsprachigen Raum unter problem solving eingestuft. Das ist mit einem Blick auf mathematische Wettbewerbsaufgaben (Känguruh-Wettbewerb, Mathematikolympiade, Bundeswettbewerb) eventuell gewöhnungsbedürftig. Allerdings kann damit vielleicht eine Entmystifizierung des Problemlösens gelingen, die gerade bei der in der PISA-Studie nachgewiesenen erschreckenden Chancenungleichheit (Baumert u.a. 2001) den Weg frei macht, allen Lernenden anspruchsvolle, aber letztlich auch bewältigbare Lernanforderungen zu stellen, also im Sinne von Winter Erfahrungen zum eigenen Denken zu ermöglichen.

Zunächst wäre also konkretisierend zu fragen, welche Ziele unter dem Label „Problemlösenlernen“ (realistischerweise) in einem Mathematikunterricht für alle verfolgt werden können und sollten (Kap.2) und welche äußeren Bedingungen dafür hilfreich sind (Kap.3). Im 4.Kapitel wird erläutert, welche spezifischen Aufgabenlöseerfahrungen und Kenntnisse über heuristische Strategien und Hilfsmittel erforderlich sind und wie sie gewonnen bzw. angeeignet werden können. Darüber hinaus geht es schließlich um ein langfristig angelegtes Gestaltungskonzept für den Mathematikunterricht, in dem verschiedene Methoden und Techniken des Problemlösenlernens ihren spezifischen Platz erhalten, vgl. Kap.5.

---

[1] George Polya war ein ungarisch-amerikanischer Mathematiker. Er lebte vom 13.Dez. 1887 - 07.Sep. 1985.
Er war Professor an der ETH Zürich und forschte in verschiedenen Bereichen der Mathematik, insbesondere aber im Bereich des mathematischen Problemlösens.

[2] In einer Untersuchung mit über 300 Schülerinnen und Schülern 8.Klassen konnte gezeigt werden, dass das Erlernen heuristischer Elemente zu verbesserten Testergebnissen in Mathematik führt und insbesondere die hohe Zahl derjenigen Lernenden, die bei schwierigeren Aufgaben völlig verweigern, fast halbiert werden konnte, vgl. auch Beispiele und Ergebnisse in Bruder/Perels/Gürtler/Schmitz(2002) sowie die Beschreibung der gesamten Untersuchung in Gürtler/Perels/Schmitz/Bruder (2002).

2. Welche Ziele werden mit Problemlösenlernen im Mathematikunterricht verfolgt?

2.1. Heureka-Effekte erleben

Es ist ein schöner Moment, wenn man sagen kann: Ich hab's geschafft!
Eine knifflige Aufgabe, ein Problem im Alltag, das uns vielleicht schon länger beschäftigt oder auch ein Rätsel ist gelöst. Man lehnt sich zurück und ist erst mal rundum mit sich und der Welt zufrieden.

Von Archimedes ist in diesem Zusammenhang der Ausspruch: Heureka-ich habs![3] überliefert. Ein solches Erlebnis – die individuelle Problemlösung muss dabei nicht gleich zum Nobelpreis führen oder wie in Archimedes Beispiel den Goldschmied den Kopf kosten – hat noch einen besonderen Nebeneffekt: Das nächste Problem geht man etwas mutiger und zuversichtlicher an – schließlich hat man positive eigene Problemlöseerfahrung im Hintergrund - warum soll es nicht auch beim nächsten Mal gelingen, mit dem anstehenden Problem fertig zu werden!

Wenn unsere Schülerinnen und Schüler die Chance erhalten sollen, solche hoch wirksamen Heureka-Effekte zu erleben, müssen sie mit geeigneten Problemen, also individuell schwierigen Aufgaben, bei denen Hindernisse zu überwinden sind, konfrontiert werden. Gleichzeitig sollten sie aber auch Lernangebote zum Überwinden dieser Hindernisse und Schwierigkeiten erhalten – insbesondere Problemlösestrategien, sogenannte Heurismen.

Im folgenden werden einige Aufgabenbeispiele aus verschiedenen schulischen und zum Teil auch alltagsbezogenen Themenfeldern vorgestellt, um später die Heurismen daran zu erläutern.

Bewegungsaufgaben

1.1. „Durchschnittsgeschwindigkeit"

Für einen Besuch bei Freunden wurde für die Autofahrt eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 100km/h eingeplant.
Leider gab es einen Stau, so dass die erste Hälfte der Strecke nur mit einem „Schnitt" von 50km/h absolviert wurde.
Wie schnell hätte auf der zweiten Hälfte gefahren werden müssen, um trotzdem noch wie vorgesehen am Ziel einzutreffen?

---

[3] Archimedes (287?-212 v.u.Z.) wurde bereits zu seiner Zeit als einer der ganz Großen gefeiert. Um sein Leben ranken sich viele Legenden – eine davon ist folgende: Der König von Syrakus ließ sich aus einem Klumpen Gold einen Kranz fertigen, misstraute jedoch seinem Goldschmied. Er bat Archimedes nachzuprüfen, ob der neue Kranz wirklich aus purem Gold war, ohne ihn jedoch wieder einzuschmelzen. Im Bade kam Archimedes der rettende Einfall, als er bemerkte, dass er beim Einsteigen in die Wanne eine bestimmte Wassermenge verdrängte.
Genial wie er war, übertrug er diese Einsicht auf das Problem mit dem Kranz und entdeckte so das Prinzip der Hydrostatik. Diese Erkenntnis brachte ihn völlig aus dem Häuschen, so dass er der Legende nach voller Begeisterung nackt aus dem Bade rannte und : „Heureka, heureka!" rief. Für den Goldschmied hatte diese Erkenntnis allerdings ein böses Nachspiel. Archimedes fand nämlich ohne den Kranz zu beschädigen heraus, dass das Gold des Königs zu einem hohen Anteil durch andere Materialien ersetzt wurde. Daraufhin ließ der König den Goldschmied hinrichten. Vgl. Bruder(2002).

1.2. *„Müller-Mufflig“*

Familie Müller wandert 12 km im Odenwald auf einem Rundweg und plant dafür 4 Stunden ein, da sie zwei kleine Kinder haben. Sie starten um 14 Uhr. Eine Stunde später tropft es bei Herrn Mufflig durch die Decke. Müllers Waschmaschine ist defekt! Herr Mufflig macht sich auf den Weg, um die Müllers zu informieren. Er läuft im Mittel 5km/h. Wann und wo könnte er die Müllers vielleicht treffen?
Würdest Du auch hinterher laufen?

1.3. „Kreistreffen“

. Zwei Körper bewegen sich auf einem Kreisumfang einander entgegen. Der eine benötigt für einen Umlauf 3 Minuten, der andere 5 Minuten. Wie viel Zeit verstreicht zwischen zwei Begegnungen? Wo finden die Begegnungen statt? Welchen Teil des Kreisumfanges durchläuft jeder Körper zwischen zwei Begegnungen?

1.4. „Bademütze“

Hans springt von einer Brücke in den Fluss, um zu baden. Dabei verliert er, ohne es zunächst zu bemerken, seine Bademütze. Erst nachdem er 10min flussaufwärts geschwommen ist, bemerkt er den Verlust. Er wendet, schwimmt der Bademütze nach und holt sie 1km unterhalb der Brücke ein. Mit welcher Geschwindigkeit fließt das Wasser im Fluss?

2. *Ungleichungen*

2.1. *„Wurzelungleichung“*

Es ist zu zeigen, dass für positive reelle a,b,c,d gilt:

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$$

2.2. „Bruchungleichung“

Es ist zu zeigen, dass für positive reelle a,b,c,d gilt:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} > \frac{3}{a+b+c}$$

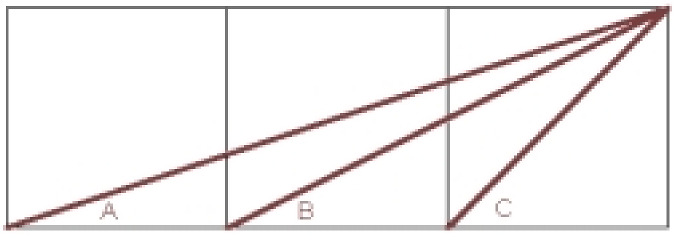
3. Optimierung

„Verpackung“

Finde unter Vorgabe der Körperform und eines bestimmten Volumens (Prisma, Zylinder, Kegel, Pyramide) mathematisch optimale Verpackungsformen im Alltag!
Warum werden die aus mathematischer Sicht verpackungsminimierenden Maße oft doch nicht verwendet, z.B. bei verschiedenen Süßwarenverpackungen?

4. *Geometrie*

„Nachbarquadrate“
Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Winkeln bei A, B und C?



5. *Altersaufgaben*

„Vater und ich“
Als mein Vater 31 Jahre alt war, war ich 8 Jahre. Jetzt ist mein Vater doppelt so alt wie ich. Wie alt bin ich jetzt?

6. *Zahlenfolgen*

„Telefonnummern merken“
Finde eine möglichst einfache Bildungsvorschrift, mit der man sich die folgenden beiden Telefonnummern merken kann:

29 16 23 und 30 37 44

Wenn man sich mit diesen Aufgaben beschäftigt, wird man feststellen, dass man von den Beispielen vielleicht unterschiedlich stark angesprochen wird, eventuell ein Beispiel recht schnell lösen kann und bei anderen benötigt man vielleicht doch etwas länger. Bei anderen Personen kann es sich aber ganz anders verhalten und auch die Lösungsideen können völlig voneinander verschieden sein jeweils in Abhängigkeit von der aktuellen Situation und Befindlichkeit, in der man mit der Aufgabe konfrontiert wird, von den eigenen Vorkenntnissen und Aufgabenlöseerfahrungen und der Intuition bzw. von den individuellen Verlaufseigenschaften des Denkens.

Die Begriffe „Problemaufgabe“ oder „Problemlösen“ können eigentlich gar nicht unabhängig vom jeweiligen Adressaten der Aufgabe bestimmt werden. Wenn man das Ziel verfolgt, Problemlösen zu lehren, muss von vorneherein an unterschiedliche Aufgabenschwierigkeiten gedacht werden, falls wirklich möglichst alle Lernenden davon profitieren sollen. Wir verwenden hier den Aufgabenbegriff, der von zentraler Bedeutung für die Unterrichtsplanung ist, als übergreifenden Gattungsbegriff, vgl. auch Bruder(2000d). Problemaufgaben sind dann ganz besondere, bezogen auf die Adressaten schwierige Aufgaben. Problemcharakter besitzt eine Aufgabe für einen Adressaten bereits dann, wenn die Anforderungssituation ungewohnt ist bzw. so erscheint und somit kein rein schematisches Arbeiten zulässt. Die Grenzen sind fließend.

Intuitive, erfolgreiche Problemlöser zeichnen sich meist durch eine hohe geistige Beweglichkeit (Flexibilität, Transferfähigkeit) in dem entsprechenden Wissens- oder Tätigkeitsgebiet aus.
Die geistige Beweglichkeit ist eine Verlaufsqualität des Denkens neben anderen wie Bewusstheit, Planmäßigkeit, Selbständigkeit und Aktivität, vgl. Lompscher (1972). Solche Verlaufsqualitäten des Denkens sind kontextabhängig und lassen sich bis zu einem gewissen Grade trainieren, d.h., dass auch evtl. mangelnde geistige Beweglichkeit bezüglich mathematischer Gebiete zumindest teilweise „kompensiert“ werden kann! Vgl. dazu Kap.4.

2.2. Realistische Ziele für Problemlösenlernen im Mathematikunterricht

Was könnten vor diesem Hintergrund realistische Ziele für Problemlösenlernen im Mathematikunterricht sein?

Die Schülerinnen und Schüler

- erkennen mathematische Fragestellungen auch in Alltagssituationen und können solche Fragestellungen formulieren

- kennen mathematische Modelle (Mathematisierungsmuster) bzw. geeignete Vorgehensweisen (Heurismen) zur Bearbeitung mathematischer Fragestellungen und können diese situationsgerecht anwenden

  von der Informationsbeschaffung über Teilhandlungen des Problemlösens bis zur Ergebnisdiskussion und -darstellung

- entwickeln Anstrengungsbereitschaft und Reflexionsfähigkeit für ihr eigenes Handeln.

Eine Möglichkeit, wie dieses Zielbild auch an die Lernenden herangetragen werden kann, zeigt folgender Überblick in Form eines Folienbildes (Klasse7/8):

Mathematisches Problemlösen - was lernen wir dabei ?

- **Hilfsmittel - z.B.: Gleichung, Tabelle, informative Figur**

und

- **Strategien – z.B.: Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Zerlegen**

zum Problemlösen, um flexibler und gelenkiger zu denken !

Das heißt aber auch:

- **Fragen stellen und formulieren üben**
- **Selbstbeobachtung beim Problemlösen**
- **Selbsteinschätzung: Was kann ich gut? Was weniger gut?**
- **Verschiedene Lösungswege kennen lernen, um die eigenen Vorlieben und Talente zu entwickeln und in verschiedene Richtungen denken zu lernen**

2.3 Mit der Mathematikbrille Fragen stellen – zentraler Bestandteil beim Problemlösenlernen

Problemlösen heißt Fragen stellen - aber welche?

Probleme, die nicht verstanden wurden, können auch nicht gelöst werden. Die Frage lautet hier:

- ***Worum geht es ?***

Erfolgreiches Problemlösen setzt solides Basiswissen voraus. Deshalb ist folgende Frage hilfreich:

- ***Was weiß ich alles schon im Zusammenhang mit dem Problem?***

Problemlösen hat eine experimentelle Komponente - Problemlösen erfordert auch "Ausprobieren". Aber dieses Ausprobieren bringt strategiegeleitet meist eher Erfolg als nur mit „trial and error" zu arbeiten:

- ***Welche Methoden und Techniken stehen mir zur Verfügung – welche eignen sich für dieses Problem?***

Eigene Fragen finden und nicht nur engführende Fragen der Lehrkraft versuchen zu beantworten- das hat etwas mit selbstbestimmtem Lernen, auch mit Kreativitätsentwicklung und vor allem mit Chancen und Fähigkeiten zum Problemlösen zu tun. Ein Problem lösen zu wollen, heißt, sich immer wieder die „richtigen" Fragen zu stellen.
Es ist eine flexible Sicht auf unsere Lebens- und Gedankenwelt, die zu neuen Fragen führt - es ist der auch für gelingende menschliche Kommunikation so wichtige Wechsel von Blickrichtungen. Man kann das (heuristische) Fragenstellen – hier bezogen auf Mathematik und ihre Anwendungen - erlernen, wenn man sich mit den fundamentalen Ideen der Mathematik und typischen Vorgehensweisen beim Mathematisieren, Bilden von Begriffen oder beim Begründen und Beweisen beschäftigt.
Man kann erst dann erspüren, was mathematisches Denken ausmacht, wenn man gelernt hat, wie man mit der Mathematikbrille ganz grundsätzlich fragt, z.B.:

> *Wie kann man die gegebene Situation strukturieren?*
> *Von welcher Natur sind die Zusammenhänge, die mathematisch beschrieben werden sollen?*
> *Gibt es überhaupt eine Lösung für dieses Problem und wenn ja, ist sie auch eindeutig ?*
> *Geht es auch einfacher?*

Der Charme der immer wieder beschworenen „offenen Aufgaben" – offen bezüglich Lösungsweg und/oder Aufgabenstellung – besteht auch darin, dass die Lernenden oftmals geeignete Fragestellungen erst finden sollen. Allerdings ist das eine Situation, in der Fragenfinden zwar verlangt, aber nicht explizit sondern nur indirekt mit erlernt werden kann. Gerade leistungsschwächere Lernende haben mit der Offenheit mancher Aufgabenstellung große Probleme. Aber das kann trainiert werden ohne zu in ein Schema zu verfallen.
Mit der Strategie des *Vorwärtsarbeitens* kann man nicht nur Berechnungs- oder Konstruktionsaufgaben lösen sondern auch interessante Fragen finden.

In einem Problemlösetraining in der Klasse 8 (einsetzbar ab Klasse 5 und fast unverändert erfolgreich auch noch in oberen Klassen) haben wir zunächst jeden einzeln notieren lassen, welche verschiedenen Möglichkeiten es zur Verwendung eines Mauersteins gibt. Wer innerhalb einer Minute 10 und mehr echt voneinander verschiedene Verwendungen findet, gilt (in diesem Bereich!) bereits als sehr geistig beweglich.

Anschließend wurden die verschiedenen gefundenen Möglichkeiten vorgelesen, so dass alle einen Einblick in die Vielfalt der Verwendungszwecke bekamen. Jetzt wurde die Strategie zur Unterstützung des Findens vieler Verwendungsmöglichkeiten vorgestellt: Man betrachtet den Mauerstein mit Blick auf seine Eigenschaften und findet: Form, Materialeigenschaften und Gewicht, aus denen sich – jetzt systematischer- sehr viele verschiedene Verwendungsmöglichkeiten erschließen lassen. Vgl. dazu auch die Mathe-Welt-Beilage in mathematik lehren Heft 115 von Abels(2002).

Die Lernenden haben diese Methode des systematischen Findens von Verwendungsmöglichkeiten anhand von Objekteigenschaften danach auf andere Objekte angewendet. Der Effekt war in jedem Falle: Es wurden mit Hilfe dieser Strategie, die wir künftig „Vorwärtsarbeiten“ nennen wollen, immer deutlich mehr Verwendungsmöglichkeiten gefunden als zuvor ohne sie. Ein solcher messbarer Erfolg macht Mut und schafft Vertrauen in die eigene auf diese Weise „geschulte“ Kreativität und lässt die Nützlichkeit, aber auch die Grenzen von heuristischen Strategien erkennen und einsehen.

Strategie:

Vorwärtsarbeiten

Was ist gegeben?
Was weiß ich über das Gegebene?

Was kann ich daraus ermitteln?

Unter lerntheoretischen Aspekten kann man das Wirkprinzip heuristischer Strategien stark verkürzt etwa so beschreiben:

> *Wenn es gelingt, die meist unterbewusst verfügbaren Problemlösemethoden geistig besonders beweglicher Personen herauszuarbeiten und diese bewusst in Form von Heurismen zu erlernen und anzuwenden, können ähnliche Problemlöseleistungen erbracht werden wie von den intuitiven Problemlösern, vgl. auch Kap.4.*

Damit jedoch keine unerfüllbaren Erwartungen geschürt werden, muss klar gestellt werden: Heuristische Strategien liefern Impulse zum Weiterdenken, sie bieten aber keine Lösungsgarantie wie ein Algorithmus.

Nachdem die Nützlichkeit von Strategiekenntnissen im Unterricht allgemein thematisiert wurde, sollte diese grundsätzliche Einsicht auf mathematikhaltige Situationen übertragen werden, z.B.:

Stelle Dir vor, Du arbeitest in der Entwicklungs-Abteilung bei der Firma „schokonet“ und sollst eine neue Süßigkeit kreieren. Überlege, welche Fragen bei Deiner Neuentwicklung gestellt werden müssen, zu deren Beantwortung auch Mathematik benötigt wird !

Allerdings muss den Lernenden deutlich werden, dass es sich bei diesem Fragenstellen zunächst „nur“ um eine Teilhandlung des mathematischen Problemlösens handelt.
Aber ein Alltagsbezug wird schon erkennbar: In welchen Situationen kann es nützlich sein, möglichst (viele) verschiedene Möglichkeiten zu kennen oder zu finden? Das sind z.B. Entscheidungssituationen, für die man gerne mehrere Optionen hätte oder auch Zwangslagen, aus denen man einen Ausweg finden will.

Übung und Anwendung zum ***Vorwärtsarbeiten***

Formuliere ***mathematische*** Fragestellungen, die für ***eine*** der folgenden Situationen von Interesse sein könnten. Versuche dabei die *Strategie des Vorwärtsarbeitens* anzuwenden!

a) Du bist bei einer Firma tätig, die O-Saft in Tetra-Packs herstellt.
b) Du bist bei Ferrero angestellt und arbeitest in der Hanuta-Abteilung.
c) Du hilfst zu Hause, das Badezimmer zu renovieren.
d) Du willst eine Kerze gießen.
e) Du entwirfst einen Swimming-Pool für euren Garten.

Meine mathematischen Fragestellungen lauten:

.....

Noch haben wir mit unseren vielen Verwendungsmöglichkeiten für irgendwelche Objekte oder den gefundenen Fragen gar kein sinnvoll erscheinendes „echtes“ mathematisches Problem gelöst. Aber wir lernen, konkrete Fragen zu stellen und sind damit in der Lage, ein komplexes Problem zu präzisieren, was es im allgemeinen auch leichter lösbar macht.

Doch die Fähigkeit, sich selbst Fragen zu stellen, hat noch eine weitere, tiefere Bedeutung. Nach Polya (1981) ist es sinnvoll, heuristische Strategien zum Problemlösen in Form von Fragen zu formulieren.

Polya teilte Problemlöse-Prozesse in vier Phasen auf und entwickelte darauf aufbauend eine Anleitung für Problemlöser. Diese Anleitung ist ein Fragenkatalog, der dem Problemlöser an jeder Stelle der Problembearbeitung mögliche Denkrichtungen aufzeigen soll. Hält man sich zunächst an diese Richtlinien - so Polya -, hat man gute Chancen das Problem zu lösen.

1. Phase: Verstehen der Aufgabe
Was ist unbekannt? Was ist gegeben? Wie lautet die Bedingung?
Ist es möglich, die Bedingung zu befriedigen? Ist die Bedingung ausreichend, um die Unbekannte zu bestimmen? Oder ist sie unzureichend? Oder überbestimmt? Oder kontradiktorisch?
Zeichne eine Figur! Führe eine passende Bezeichnung ein!
Trenne die verschiedenen Teile der Bedingung! Kannst du sie hinschreiben?

Polya legt großen Wert darauf, dass die Problemlöser sich zunächst über die Aufgaben- bzw. Problemstellung ganz klar werden. In dieser Phase soll noch gar kein Plan ausgedacht werden - geschweige denn mit der Lösung begonnen werden. Wie ganz aktuell die PISA-Studie zeigt, hat gerade auch das Textverständnis ganz erheblichen Einfluss darauf, eine Aufgabe lösen zu können.

Polya versammelt in der zweiten Phase eine ganze Reihe von Fragen, die sicher dabei helfen können systematisch und zielgerichtet einen Plan zu entwickeln. Modernes Problemlösen bevorzugt anstatt eines einzigen Fragenkomplexes aber einzelne Strategien- vgl. das „allgemeine Problemlösemodell" weiter unten.

2. Phase: Ausdenken eines Planes

- Hast du die Aufgabe schon früher gesehen? Oder hast du dieselbe Aufgabe in einer wenig verschiedenen Form gesehen?
- Kennst du eine verwandte Aufgabe? Kennst du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte?
- Betrachte die Unbekannte! Und versuche dich auf eine dir bekannte Aufgabe zu besinnen, die dieselbe oder ähnliche Unbekannte hat.
- Hier ist eine Aufgabe, die der deinen verwandt und schon gelöst ist. Kannst du die gebrauchen? Kannst du ihr Resultat verwenden? Kannst du ihre Methode verwenden? Würdest du irgendein Hilfselement einführen, damit du sie verwenden kannst?
- Kannst du die Aufgabe anders ausdrücken? Kannst du sie auf noch verschiedene Weise ausdrücken? Geh auf die Definition zurück!
- Wenn du die vorliegende Aufgabe nicht lösen kannst, so versuche zuerst eine verwandte Aufgabe zu lösen. Kannst du dir eine zugänglichere verwandte Aufgabe denken? Eine allgemeinere Aufgabe? Eine speziellere Aufgabe? Eine analoge Aufgabe? Kannst du einen Teil der Aufgabe lösen? Behalte nur einen Teil der Bedingung bei und lasse den anderen fort; wie weit ist die Unbekannte dann bestimmt, wie kann ich sie verändern? Kannst du etwas Förderliches aus den Daten ableiten? Kannst du dir andere Daten denken, die geeignet sind, die Unbekannte zu bestimmen? Kannst du die Unbekannte ändern oder die Daten oder, wenn nötig, beide, so dass die neue Unbekannte und die neuen Daten einander näher sind?
- Hast du alle Daten benutzt? Hast du die ganze Bedingung benutzt? Hast du alle wesentlichen Begriffe in Rechnung gezogen, die in der Aufgabe enthalten sind

3. Phase: Ausführen des Planes

- Wenn du einen Plan der Lösung durchführst, so **kontrolliere jeden Schritt.** Kannst Du deutlich sehen, dass der Schritt richtig ist? Kannst du beweisen, dass er richtig ist?

4. Phase: Rückschau

- Kannst du das **Resultat kontrollieren?** Kannst du den Beweis kontrollieren?
- Kannst du das Resultat auf verschiedene Weise ableiten? Kannst du es auf den ersten Blick sehen?
- Kannst du das Resultat oder die Methode für irgendeine andere Aufgabe gebrauchen?

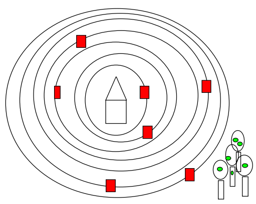
Diese vierte Phase formuliert Polya vor allem aus zwei Gründen: Einmal als Kontrolle im herkömmlichen Sinn um die Richtigkeit der Problemlösung zu sichern. Andererseits sollen die Erkenntnisse aus einer Problembearbeitung auch für andere, zukünftige Probleme nutzbar werden.

Solche Fragen sollte man jedoch nicht einfach den Lernenden vorgeben oder sie gar auswendig lernen lassen. Diese oder ähnliche Fragen müssen anhand eigener Problemlöseerfahrung erarbeitet und im Sinne einer konstruktivistischen Lernauffassung am besten auch selbst formuliert werden.

An Hand von *Musteraufgaben* werden geeignete Hilfsmittel und Strategien besprochen und anschließend an *Wahlaufgaben* geübt.

Eine Beispielaufgabe, die sich auch als Musteraufgabe für *Rückwärtsarbeiten* bereits ab Klasse 5/6 eignet, lautet:

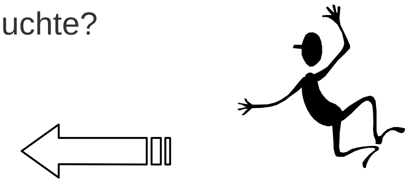
„Die sieben Tore“
Ein Mann geht Äpfel pflücken. Um in die Stadt zu kommen, muss er 7 Tore passieren. An jedem Tor steht ein Wächter und verlangt von ihm die Hälfte seiner Äpfel und einen Apfel mehr. Am Schluss bleibt dem Mann nur ein Apfel übrig. Wie viele hatte er am Anfang?

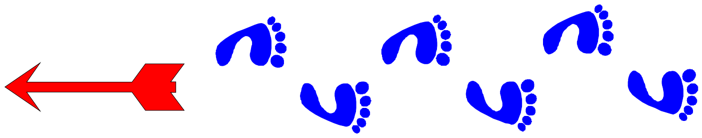


Diese Aufgabe ist durch *„Rückwärtsarbeiten“* relativ leicht zu lösen, wenn noch eine geeignete Darstellungsform gefunden wird (Pfeilbild, Tabelle, Mengenbild). Von den Lernenden werden schließlich Vorschläge zur Visualisierung der Strategie und zur Formulierung geeigneter Hilfsfragen analog zum Vorwärtsarbeiten unterbreitet:

Rückwärtsarbeiten:

Was ist gesucht?
Was weiß ich über das Gesuchte?
Was benötige ich, um das Gesuchte zu ermitteln?





Orientierungsfragen zur Unterstützung der Verwendung von Heurismen beim Problemlösen (allgemeines Problemlösemodell):

- Worum geht es in der Aufgabe? (eigene Problembeschreibung)
- Wie kann man mit Hilfe bekannter Begriffe das Problem verständlicher oder sogar einfacher formulieren?
- Wie kann man die Problemstellung veranschaulichen oder anders darstellen? *(Heuristische Hilfsmittel)*
- Welche ähnlichen Probleme wurden bereits gelöst? Wie? *(Analogieprinzip)*
- In welche Teilprobleme kann man das Problem zerlegen? *(Zerlegungsprinzip)*
- Auf welche bereits gelösten Probleme kann man Teile des Problems zurückführen? *(Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes)*
- Um welchen Aufgabentyp handelt es sich? (evtl. *spezielle heuristische Prinzipien* nutzen)
- Was lässt sich aus den gegebenen Angaben folgern? (*Vorwärtsarbeiten*)
- Was wird benötigt, um das Gesuchte ableiten zu können? (*Rückwärtsarbeiten*)

Fragen für die Reflexionsphase:

- Welche Lösungsstrategien haben bei der Lösung des Problems geholfen?
- Welche neuen Vorgehensweisen konnte man an dem gelösten Problem erkennen?
- Welcher Lösungsweg eignet sich am besten für das Problem?

Unsere Unterrichtserfahrungen und Ergebnisse aus einem Forschungsprojekt zum Problemlösenlernen zeigen, dass heuristische Strategien und Prinzipien über geeignete Fragestellungen erlernt werden können und dass dieses zu einer Leistungssteigerung und deutlich verringerten Leistungsverweigerung bei schwierigen Aufgaben führt, vgl. u.a. auch Bruder/Perels/Gürtler/Schmitz(2002).

Details zur Umsetzung der Ideen von Polya in den Unterricht, zusammengefasst in unserem „allgemeinen Problemlösemodell“ (siehe oben), enthält Kapitel 5, die Heurismen werden im Kapitel 4 näher erläutert.

2. Einige Bedingungen und Voraussetzungen für nachhaltiges Problemlösenlernen

3.1. Zielklarheit

Entscheidend für den Lernerfolg ist es, welche Aufgabe sich die Lernenden aus einer gestellten jeweils selbst ableiten und wie diese subjektive Aufgabenstellung – wir wollen sie die *eigene Lernaufgabe* nennen - schließlich bearbeitet wird.

Im Unterricht kann man gut beobachten, dass viele Lernende sich durchaus erfolgreich eine gestellte Aufgabe zu eigen machen, indem sie z.B. nachfragen und sich bemühen, die Intentionen der Lehrkraft zu erfassen. Man kann aber auch beobachten, dass die individuelle Umwandlung der gestellten Aufgabe in eine eigene Lernaufgabe teilweise oder völlig misslingt. Statt sich z.B. bewusst mit einer Frage, einem Bewegungsablauf oder einem Text auseinander zu setzen, werden von einigen Lernenden z.B. bestimmte Vorgaben nur schematisch abgearbeitet oder sie beschäftigen sich mit ganz anderen Dingen. In diesem Fall stimmen die gestellte Aufgabe und die selbst konstruierte Lernaufgabe nicht überein. Eine gute Übereinstimmung wäre allerdings hilfreich für den individuellen Lernerfolg.

Wenn es gelingen könnte, die Übernahme von Verantwortung für das eigene Lernen sowie Zielklarheit und eine persönliche Sinn- oder Bedeutungsvorstellung über die jeweiligen Lerninhalte bei den Schülerinnen und Schülern zu stärken, würden viele Aufgaben weniger schematisch und mit mehr innerer Beteiligung bearbeitet werden.

Diese drei Aspekte sind wesentliche Voraussetzungen dafür, dass die „von außen" gestellten Aufgaben zur individuellen Lernaufgabe werden.
Gelingt es darüber hinaus die Schülerinnen und Schüler zum Nachdenken über ihr Vorgehen beim Lösen einer Aufgabe anzuhalten, wachsen die Chancen, dass sie mit Hilfe einer solchen reflektierten Aufgabenbearbeitung tatsächlich etwas Verfügbares dazugelernt haben und nicht einfach nur „beschäftigt" waren.

Es kommt also nicht nur darauf an möglichst „gute" Aufgaben zu finden sondern die Art des Umgangs mit den Aufgaben ist letztlich entscheidend für den Lernerfolg. Man kann immer wieder beobachten, dass erfolgreiche Lehrerinnen und Lehrer praktisch aus jeder noch so unscheinbaren Aufgabe „etwas machen können".
In allen drei Phasen der Bearbeitung einer Aufgabe von der Informationsaufnahme durch die Lernenden und Entstehung der individuellen Lernaufgabe über die Informationsverarbeitung bis zur Ergebnisdarstellung können den Lernenden durch einen spezifischen Umgang mit der Aufgabe wertvolle Orientierungshilfen gegeben und eigene Denkerfahrungen ermöglicht werden.

Es gibt keinen Automatismus und es hängt von sehr vielen Faktoren ab, adäquate *eigene Lernaufgaben* bei den Lernenden zu initiieren. In diesem Zusammenhang seien die empirischen Untersuchungsergebnisse von Jäger/Helmke(2001) aus dem Projekt MARKUS erwähnt, die ganz klar gezeigt haben, dass gute Lernleistungen zunächst einmal ein gutes „classroommanagement" voraussetzen. Das wird keinen erfahrenen Praktiker überraschen. Also besteht die erste Aufgabe für die Lehrkräfte darin, dafür zu sorgen, dass lernförderliche Bedingungen herrschen, damit zielgerechte Lernaufgaben individuell entstehen können. Dazu gehört auch eine ruhige, die Konzentration und angestrengte Auseinandersetzung mit der Aufgabe fördernde Arbeitsatmosphäre in der Phase der Informationsaufnahme. Die schönsten Aufgaben nützen gar nichts, wenn sie nicht „ankommen“- und das gleich in mehrfacher Hinsicht. Ein günstiges Lernklima ist dafür eine notwendige aber noch nicht hinreichende Voraussetzung.

3.2. Problemlösen wollen, dürfen und können!

Chancen, im Mathematikunterricht kreativ zu sein, bieten entsprechende entwicklungsgemäße und entwicklungsfördernde Lernanforderungen auf der Grundlage diesbezüglicher Ziele und Inhalte des Mathematikunterrichts in Verbindung mit einer kreativitätsfreundlichen Lernatmosphäre:

- sich irren, ist erlaubt und ein Schmierzettel auch...
  (es gibt bewertungsfreie Phasen im Unterricht und Zeit zum Nachdenken – Ermöglichung angstfreien Lernens)

- jede geäußerte Idee wird ernst genommen
  (gegenseitige Wertschätzung von Schülern und Lehrern; vorurteilsfreier Umgang miteinander)

- unterschiedliche Vorgehensweisen werden nicht nur toleriert und akzeptiert, sondern auch entsprechend gewürdigt - auch in Tests

- dem Orientierungsbedarf der Schülerinnen und Schüler wird Rechnung getragen durch klare Zielstellungen und Bewertungsmaßstäbe im Sinne eines Orientierungsrahmens für das eigene Lernen und durch Vermeidung kleinschrittiger, selbständiges Denken und Handeln eher verhindernde Vorgehensweisen

Bezogen auf die Ziele und Inhalte des Mathematikunterrichts ist wünschenswert ein

- ausgewogenes Verhältnis zwischen formalen und anwendungsorientierten Kompetenzen

- vernetzter Lehrgangsaufbau zur Vermeidung von Inselwissen

- Vermittlung verschiedener mathematischer Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren sowie Methoden und Techniken, die zur Bearbeitung eines Themenfeldes geeignet sind (modulare themenorientierte Curriculumstruktur versus eines eindimensionalen systematisch theorieorientierten Aufbaus), um aus einem breiten Fundus auswählen zu können

Bezüglich der Art der Lernanforderungen sind folgende methodischen Aspekte von Bedeutung:

- ***Wahlaufgaben***
  (es kann aus einem Aufgabenangebot zu einem Thema mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden und ggf. auch verschiedenen Einkleidungen individuell ausgewählt werden)

Voraussetzung dafür, dass diese Chancen wahrgenommen werden (Vermeidung von Unter- oder Überforderung), ist die schrittweise Befähigung der Schülerinnen und Schüler zu einer realistischen Selbsteinschätzung (Erkennen eigener Stärken und Schwächen) und zur Übernahme von Verantwortung für das eigene Lernen.

-***"offene" Aufgaben***

als Lernanforderungen, die **auf verschiedenen Wegen** und **mit unterschiedlichem Resultat** bewältigt werden können (z.B. eine Geschichte zu einem Weg-Zeit-Diagramm schreiben; mehrere Aufgaben und deren Lösungswege unter verschiedenen Aspekten miteinander vergleichen) insbesondere auch:

- Aufgaben selbst erfinden

als Lernanforderungen, aus denen weiterführende, ergänzende oder auch vertiefende Fragestellungen durch geeignete Abwandlungen/Variationen/ Ergänzungen einer vorgegebenen Aufgabe entwickelt werden **(Blütenmodell)**[4] der Aufgabenvariation- besonders geeignet bei innermathematischen Fragestellungen) in Form von Problemsituationen, aus denen erst mathematische Fragestellungen entwickelt werden müssen (**Trichtermodell** der Aufgabenvariation z.B. bei Anwendungs- bzw. Modellierungsaufgaben)

- ***Aufgaben mit Problemcharakter*** in der "Zone der nächsten Entwicklung" z.B. innermathematische Knobelaufgaben, aber auch:

> *„Flussbreite"*
> Finde möglichst viele verschiedene Methoden, wie man die Breite eines Flusses mit Peilstab, Winkelmesser und Maßband bestimmen kann!
>
> Anmerkung: Zu dieser Aufgabe gibt es mehr als 10 verschiedene Lösungswege. Sie ist bereits mit einfachsten Winkelkenntnissen und Vorstellungen über gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke in Klasse 5 und 6 lösbar. Im Laufe der Schuljahre reichern sich die mathematischen Instrumente schrittweise an (Parallelogramm, Strahlensätze, Trigonometrie).

Damit möglichst viele Lernende auch Problemlösen lernen **wollen**, sind folgende Aspekte wesentlich:

- Lob und Anerkennung für besondere Leistungen, für ungewohnte, neue

[4] Diese Begriffe wurden von Schupp geprägt.

Lösungswege ; Förderung gesunden Wettbewerbs

- Mathematik kann in ihrer Entstehung erlebt werden; Sinn- und Bedeutungszusammenhänge werden transparent
- altersgerechte Themenwahl und Berücksichtigung sich ändernder Freizeitinteressen und Lebens- und Erfahrungsräume der Schülerinnen und Schüler ohne sich diesen zu beugen - Schülerinnen und Schüler müssen auch mit Sachverhalten konfrontiert werden, für die sie sich (noch) nicht interessieren

- die Aufgabe enthält Verblüffendes, regt zum Staunen an und zur Beantwortung z.B. solcher Fragen: Wie kommt das? Gilt das immer? Ist das überhaupt richtig?

- die Frage wird so gestellt, dass den Schülerinnen und Schülern Kompetenzen zugetraut werden, z.B.:

  Wie würdest Du entscheiden?
  Berate ... bei seiner Entscheidung!
  Gibt es noch einen anderen Weg - eine andere Möglichkeit?...

Eine andere Bedingung, die mit motivationalen Aspekten eng verknüpft ist, besteht in einer angemessenen Qualität der gestellten Anforderungen:

Sind Aufgaben in der konkreten Lernsituation für das Individuum **entwicklungsgemäß** und **entwicklungsfördernd,** können sie als bewältigbare Herausforderung angenommen werden.

Die Lehr-Kunst besteht zu einem großen Teil darin, genau solche passenden und damit auch schon motivierenden Aufforderungen zum Lernhandeln zu entwerfen und den initiierten Bearbeitungsvorgang entsprechend zu begleiten. Als Lösung dieses Problems werden heute meist sogenannte „offene Aufgaben“ benannt, die schon von sich aus differenzierend sind, weil die Lernenden ihr Bearbeitungsniveau i.w. selbst bestimmen können. Darin liegt aber auch wieder ein Problem, denn wie kann mit offenen Aufgaben (allein!) ein Lernfortschritt im gewünschten Sinne erreicht werden?

Wir können festhalten: Aufgabenvielfalt allein ist noch keine Garantie für erfolgreiches Lernen und: Aufgabenstellungen, die mehr Spielraum lassen für die Konstruktion individuell passender Lernaufgaben bieten größere Chancen für Lernerfolge. Doch es muss auch ein entsprechendes Anspruchsniveau gesichert sein.

4. Heuristische Hilfsmittel, Prinzipien und Strategien

4.1. Das Wirkprinzip heuristischer Bildung

Die Vorgehensweisen geistig besonders beweglicher Problemlöser kann man analysieren und beschreiben. Das, was dabei heraus kommt, sind heuristische Prinzipien, Regeln, Strategien oder Hilfsmittel. Polya, aber u.a. auch Engel, König und Sewerin haben solche Heurismen formuliert. Wenn es gelingt, diese zu erlernen und flexibel anzuwenden, können ähnliche Effekte erzielt werden wie von den intuitiven Problemlösern. Gefördert werden damit sowohl leistungsschwächere als auch leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler, wenn die Heurismen als hilfreich erlebt werden, weil man ohne sie nicht so gut zurecht kam. Das heißt wieder, dass die Aufgaben jeweils schwierig genug aber auch bewältigbar sein müssen, dass sie in der „Zone der nächsten Entwicklung“ (Wygotski) liegen sollten.

Es geht also darum, im Unterricht geeignete Heurismen zunächst bewusst zu erlernen, um sie dann schrittweise sogar unterbewusst zu nutzen. Dazu werden Musteraufgaben bereit gestellt, die später eine „Eselsbrückenfunktion“ übernehmen. Wenn die Musteraufgaben einen Namen haben, lassen sie sich leichter merken.

Das Erlernen von Heurismen funktioniert etwa so, wie man Autofahren lernt:
Zuerst wird hoch konzentriert und noch etwas ungeschickt an den Hebeln herumhantiert, aber doch recht schnell werden die Abläufe (Strategien, Hilfsmittel, Prinzipien) ohne großes Nachdenken beherrscht. Man bedient sich in gewohnten Situationen (keine Problemaufgabe mehr!) schon unterbewusst der einzelnen Hebel und Knöpfe, kann deren Funktionalität jedoch immer wieder bei angespannten Situationen (Problemaufgabe!) ins Bewusstsein zurückholen und dann zielgerichtet anwenden.
Heurismen sind geistige Werkzeuge, die man kennen und flexibel handhaben lernen muss. Wie kann man das erreichen?

Gute Problemlöser haben eine besonders hohe **geistige Beweglichkeit**. Diese äußert sich in den folgenden Erscheinungsformen beim Problemlösen mit mathematischen Mitteln, vgl. hierzu Lompscher (1976) und Hasdorf (1976):

Reduktion:	Die SchülerInnen reduzieren das Problem intuitiv richtig auf das Wesentliche, können gut fokussieren.
Reversibilität:	Die SchülerInnen können sehr gut Gedankengänge rückwärts nachvollziehen. Sie tun das in geeigneten Situationen automatisch. Im Alltag wird diese Fähigkeit auch benötigt z.B. beim Suchen nach einer Brille oder dem verlorenen Schlüssel.
Aspektbeachtung:	Sie beachten mehrere Aspekte des Problems gleichzeitig oder erkennen die Abhängigkeiten von Dingen leicht und variieren sie gezielt.
Aspektwechsel:	Sie wechseln gegebenenfalls die Annahmen oder Kriterien, um der Lösung auf die Spur zu kommen. Es werden intuitiv verschiedene Aspekte des Problems betrachtet, was ein "Steckenbleiben" vermeidet oder überwindet.
Transferierung:	Gute Problemlöser können leichter ein bekanntes Vorgehen auf einen anderen, manchmal sogar sehr verschiedenen Kontext übertragen. Sie erkennen den übertragbaren "Kern" der Aufgabe.

Ungeschulte, gute Problemlöser können allerdings meist nicht bewusst auf diese Fähigkeiten zugreifen. Daher können sie auch oft nicht erklären, wie sie das Problem eigentlich gelöst haben.

Es gibt eine Vielzahl schulrelevanter heuristischer Vorgehensweisen und Techniken. Eine sinnvolle Gliederung findet sich z.B. bei Lehmann (1990) wie folgt:

heuristische Hilfsmittel		
Tabelle	Informative Figur	Wissensspeicher
Variable/Gleichung	Lösungsgraph	
heuristische Strategien		
Vorwärtsarbeiten (VA) Rückwärtsarbeiten (RA)	Kombiniertes VA und RA Systematisches Probieren	Suche nach Gleichungen, Beziehungen bzw. Mathematisierungsmustern
Spezielle heuristische Prinzipien		
Invarianzprinzip Fallunterscheidungsprinzip Extremalprinzip	Symmetrieprinzip Zerlegungsprinzip Schubfachprinzip[5]	Arbeiten mit Einzel- und Spezialfällen
Allgemeine heuristische Prinzipien		
Analogieprinzip	Rückführungsprinzip	Transformationsprinzip

Jetzt lässt sich ein Zusammenhang herstellen zwischen den Erscheinungsformen geistiger Beweglichkeit und einzelnen Heurismen, die dafür unterstützend wirken können:

Beweglich-keitsaspekt	**Heurismen**	**Teilhandlungen**
Reduktion	*informative Figuren*	veranschaulichen (Aufgabe verstehen, einfaches Modell finden)
	Tabellen	strukturieren eines Sachverhalts
	Gleichungen	Zusammenhänge beschreiben (Modellierung)

[5] Das Schubfachprinzip findet derzeit so gut wie keine Anwendung im normalen Schulunterricht, was nur bedauert werden kann. In Materialien zur Förderung mathematisch interessierter Schüler/innen findet man jedoch viele anregende und leicht verstehbare Anwendungen.

Reversibilität	*Rückwärtsarbeiten*	Umkehraufgaben *Was müsste ich kennen, um die gesuchte Größe zu bestimmen?*
Aspekt-beachtung	*Invarianzprinzip*	*Suche in Unterschiedlichem das Gemeinsame!* (Relativität erfassen oder mehrere Aspekte gleichzeitig)

Beispiele:
Bildungsprinzip von Zahlenfolgen erkennen (Invarianten suchen)
Treffpunktaufgaben (*Ort ist gleich!*)
Altersaufgaben *(Altersdifferenz bleibt gleich)*

	Extremalprinzip	Suchen nach Erfüllungsmengen für Randbedingungen oder nach extremen Fällen unter mehreren möglichen
	Zerlegungsprinzip	Wie kann man die Aufgabenstellung, den Sachverhalt oder das mathematische Objekt geschickt zerlegen oder aufteilen?
Aspektwechsel	*kombiniertes Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten*	

Beispiel:
Zwei Metallwürfel mit gegebener ganzzahliger Kantenlänge, z.B. 3cm und 4cm, werden zu einem Quader zusammen geschmolzen.
Welche ganzzahligen Maße könnte ein solcher Quader erhalten?

Transformationsprinzip Übergang in eine Modellebene

Suche nach anderen mathematischen Beschreibungs-möglichkeiten für das Gegebene und Gesuchte!

Variiere die Bedingungen! Betrachte Gegebenes und Gesuchtes inverschiedenen Zusammenhängen!

Zerlege, ergänze oder verknüpfe mit Neuem!

Beispiele:
Betrachtung ebener Probleme im Raum,
vektorielle Beschreibung elementargeometrischer Zusammenhänge.

4.2. Heuristische Hilfsmittel

In unseren Untersuchungen hat sich gezeigt, dass die heuristischen Hilfsmittel in der Sekundarstufe I besonders leicht erlernt werden, sehr überzeugend sind und schnelle Erfolge in kurzer Trainingszeit beim Lösen schwierigerer Sach- und Anwendungsaufgaben bringen. Die heuristischen Hilfsmittel sind darüber hinaus auch gut geeignet, um intuitive Lösungen „im Kopf“ von leistungsstarken Schülern dennoch nachvollziehbar zu dokumentieren.

Ein Beispiel:

> *„Murmeln verteilen“*
> Claudia nimmt die Hälfte der Murmeln aus einem Sack und behält sie für sich. Dann gibt sie zwei Drittel der Murmeln, die noch im Sack waren, Peter. Sie hatte dann sechs Murmeln übrig. Wie viele Murmeln waren am Anfang im Sack gewesen?

Dass ein Sechstel der Murmeln gerade den verbliebenen 6 Murmeln entspricht, kann man grafisch genauso demonstrieren, wie es bei sehr „beweglichen“ Problemlösern ganz ähnlich im Kopf abläuft. Die unbekannte Gesamtzahl der Murmeln im Sack wird durch die Länge einer Strecke symbolisiert. Diese Strecke wird zunächst halbiert und eine Hälfte noch mal in drei Teile geteilt.
Es ist also nicht notwendig, eine solche Aufgabe unbedingt in den Kontext des Arbeitens mit Gleichungen zu stellen. Das heißt natürlich auch, dass andere Zugänge neben der (möglicherweise gerade erlernten) Gleichungsmethode in einem Test gleich bewertet werden müssten.

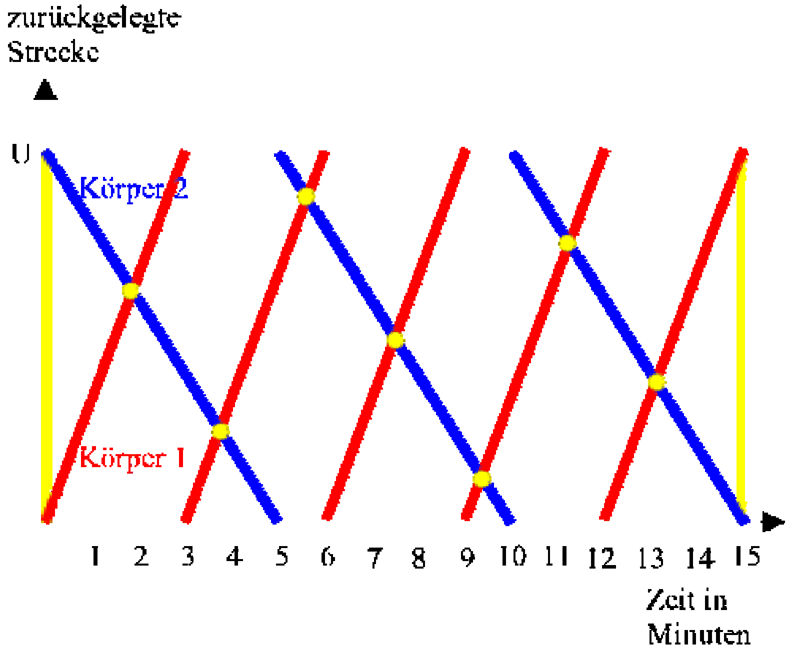
4.2.1. Die informative Figur

Altbekannt ist der Hinweis, dass man sich doch zunächst eine Skizze machen sollte. Gemeint ist, eine Vorstellung vom Aufgabenkontext zu entwickeln.
Allerdings nützt dieser Hinweis oft nicht viel, weil die Schülerinnen und Schüler gar nicht gelernt haben, eine sinnvolle Skizze zu entwickeln, die tatsächlich weiter helfen kann.
Bei geometrischen Zusammenhängen hilft oft der Impuls: versuche die gegeben und gesuchten Stücke in eine bekannte Beziehung zu setzen, also ein (rechtwinkliges) Dreieck o.ä. Wir wollen eine „sinnvolle Skizze“ dann eine informative Figur nennen. Visualisierungen algebraischer Zusammenhänge spielen hierbei eine große Rolle. Allerdings müssen solche Beziehungen auch wieder explizit erlernt werden. Dazu gehört, dass das Produkt zweier Zahlen als Rechteckfläche visualisiert werden kann und eine bestimmte Anzahl als Länge einer Strecke. Das Koordinatensystem kommt hinzu, wenn es um Darstellungen von Zuordnungen geht.
Für die Bewegungs- und Altersaufgaben gibt es sehr schöne geometrische bzw. grafische Lösungswege, die ihre Orientierungswirkung für ähnliche Beispiele auch dann entfalten können, wenn man selbst nicht darauf gekommen ist sondern solche Lösungswege von anderen vorgestellt werden.

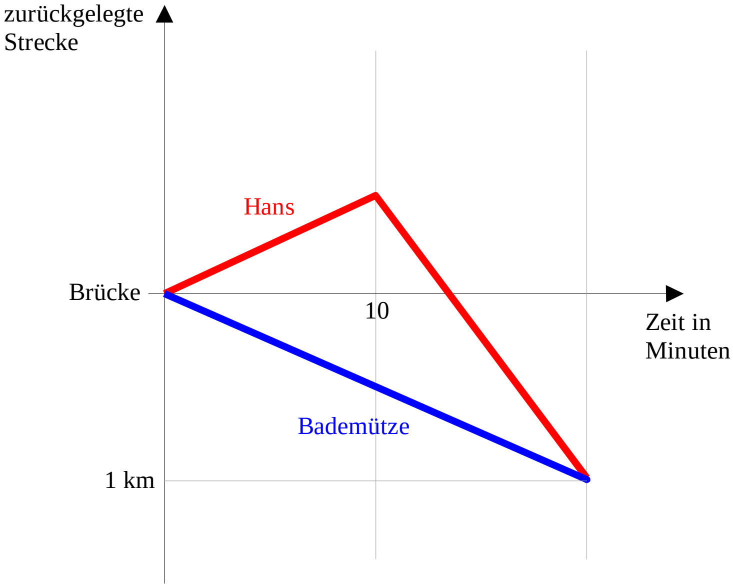
Lösung„Kreistreffen“

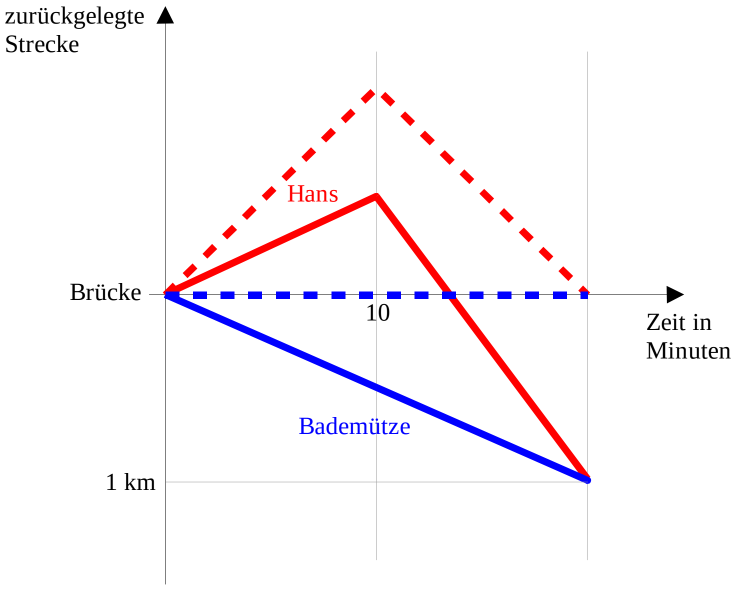
Der Zeichnung entnimmt man, dass sich die Körper in 15min 8-mal treffen. Die Treffen finden immer im gleichen Abstand statt, sie begegnen sich alle 15/8min, das sind 112,5sec.

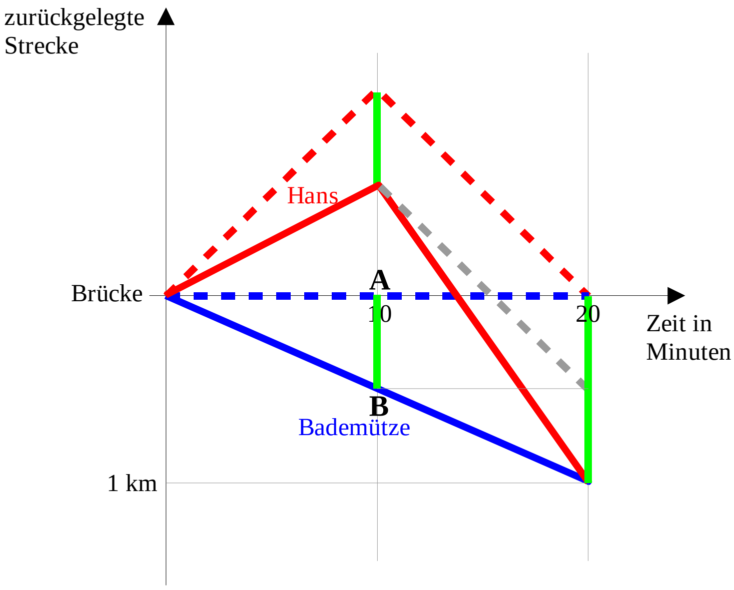
Die Treffpunkte teilen den Kreis in 8 gleiche Teile. Der schnellere Körper durchläuft also 5/8 des Kreises, der langsamere 3/8.



Hier eine grafische Lösung der Bademützen-Aufgabe:


zurückgelegte Strecke
Hans
Brücke
10
Zeit in Minuten
Bademütze
1 km

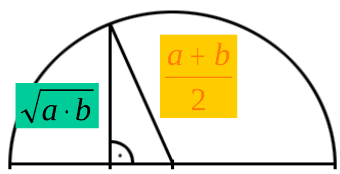

zurückgelegte Strecke
Hans
Brücke
10
Zeit in Minuten
Bademütze
1 km

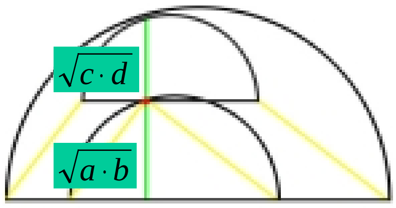

zurückgelegte Strecke
Hans
A
Brücke
10
20
Zeit in Minuten
B
Bademütze
1 km

Bei der *Müller-Mufflig*-Aufgabe kann man grafisch sehr schön die Bewegungsrichtungen unterscheiden. Schließlich handelt es sich um einen Rundweg und Herr Mufflig könnte den Müllers ja auch entgegen laufen, vgl. Bruder (2000b). Auch für Modellierungsüberlegungen sind grafische Darstellungen sehr hilfreich, weil dann auch deutlich wird, welche Annahmen man alle macht oder bewusst machen muss: Gleichmäßiges Tempo, keine Pausen o.ä.

Auch für die „*Wurzelungleichung*“ sind Visualisierungen interessant, was allerdings erneut auch spezifische Grundkenntnisse voraussetzt wie z.B. die Visualisierung der Mittelungleichung, die das arithmetische mit dem geometrischen Mittel im Halbkreis vergleicht mit Hilfe des Höhensatzes in rechtwinkligen Dreiecken.

Eine mehrfache Anwendung der Beziehung der Mittelungleichung liefert die Einsicht in das Gewünschte.





In diesem Fall würde man die algebraische Lösung vermutlich aber als näher liegend einstufen:

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$$

$$ab + ad + cb + cd \overset{?}{\geq} ab + 2\sqrt{abcd} + cd$$

$$ad + cb \overset{?}{\geq} 2\sqrt{abcd}$$

$$a^2d^2 + 2abcd + c^2b^2 \overset{?}{\geq} 4abcd$$

$$(ad - cb)^2 \geq 0$$

In diesem Themenbezug – Mittelwerte – steht auch die allererste Bewegungsaufgabe *„Durchschnittgeschwindigkeit“*, für die sich ebenfalls eher

Gleichungen zur Lösung anbieten. Mit dieser Aufgabe kann das harmonische Mittel thematisiert werden – auch mit anschließender Visualisierung.
Für die Zeit gilt bei konstanter Geschwindigkeit :

$$t = \frac{s}{v}$$

Fahrzeit 1. Hälfte + Fahrzeit 2.Hälfte = Gesamtzeit

$$t_1 + t_2 = t_{gesamt}$$

$$\frac{\frac{s}{2}}{50} + \frac{\frac{s}{2}}{v} = \frac{s}{100} \qquad \frac{s}{100} + \frac{s}{2v} = \frac{s}{100}$$

Interpretation: Die für den Gesamtweg geplante Zeit ist bereits nach der 1.Weghälfte abgelaufen!

4.3.1. Tabellen

Tabellen eignen sich zur Unterstützung des systematischen Probieren z.B. bei Treffpunktaufgaben (siehe Müller-Mufflig-Aufgabe) oder als Darstellungsform, wenn es um vollständige Fallunterscheidungen geht; zum Finden verschiedener Lösungsmöglichkeiten oder für das Darstellen von Zuordnungen (Wertetabellen) und schließlich für Mischungsrechnungen als einer speziellen Zuordnungsform von Objekten oder Situationen und deren verschiedenen Eigenschaften.

Zeit	Müller	Mufflig	Bemerkungen
15 Uhr	3km	O	Herr Mufflig läuft los!
16 Uhr	6km	5km	Noch nicht eingeholt!
17 Uhr	9km	10km	Bereits überholt! Müllers sind schon zu Hause!
16.30 Uhr	7,5km	7,5km	Treffpunkt!

Wie man mit Hilfe von Tabellen einen Zugang zum Invarianzprinzip unterstützen kann, zeigen Peter/Winkelmaier(2002).

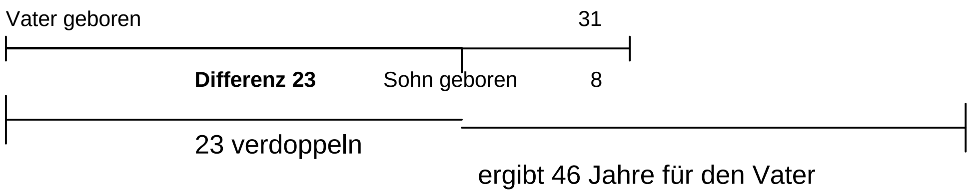
4.3. Heuristische Prinzipien

4.3.1. Das Invarianzprinzip

Invarianten stecken manchmal im Sachbezug der Aufgabe bereits drin oder man muss sich eine solche Invariante konstruieren.
Das Telefonnummernbeispiel ist von der Art, dass man eine Invariante, nämlich die Differenz 7 zwischen den Zweiergruppen von Ziffern erkennen muss. Dann gilt es, diese Einsicht auch gegen Widerstände durchzuhalten und die erste Zweiergruppe

von Ziffern einfach aufzuspalten. Dann genügt es nämlich, mit 2 beginnend immer nur 7 zu addieren, um ganz leicht beide *Telefonnummern* zu erzeugen.
Dieses einfache Beispiel zeigt sehr anschaulich, welche künstlichen Barrieren man sich oft selbst schafft und wie das mit der Aspektbeachtung als geistiger Beweglichkeitsqualität gemeint ist.

Bei Altersaufgaben kann das Identifizieren des Altersunterschieds als Invariante in Verbindung mit einer Visualisierung zu schnellen Lösungen führen. Für unser Beispiel „Vater und ich" gilt:



Eine Invariante zu konstruieren ist dagegen bei Aufgaben hilfreich, die in die Kategorie fallen: Eine Pumpe schafft k Liter in einer bestimmten Zeit t, dann fällt sie aus und eine andere Pumpe mit g Liter in einer bestimmten Zeit macht weiter – usw. Wenn man beide Pumpen vergleichbar macht über eine vorgegebene Zeiteinheit, also fragt, wie viel jede Pumpe z.B. pro Stunde schafft, dann lassen sich verschiedene Füllprobleme oft sogar recht schnell lösen. Auch wenn der Praxisbezug solcher Aufgaben kaum überzeugen wird, geht es um Denkerfahrungen des Inbezugsetzens von zeitlichen Abläufen. Objekte und Situationen aufeinander beziehen zu können gehört zu den zentralen Mathematisierungsmustern.
Weitere Beispiele zum Invarianzprinzip vgl. Bruder (1994).

4.3.2. Das Symmetrieprinzip

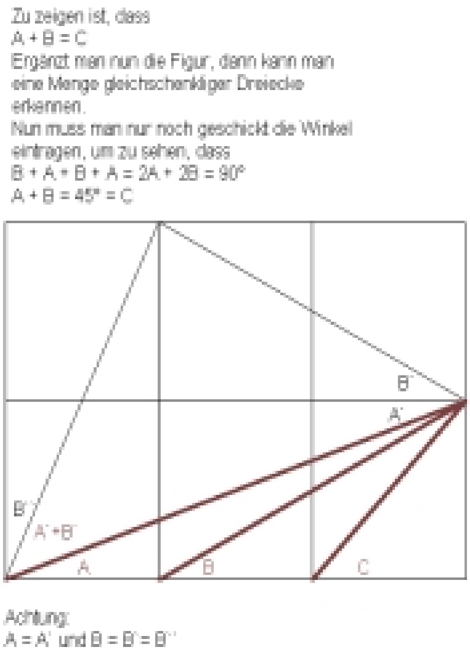
Die *„Bruchungleichung"* kann die Tragweite und Grundidee eines solchen Prinzips weit über eher enge geometrische Vorstellungen hinaus demonstrieren. Auch hier geht es einerseits um das Suchen nach immanenten Symmetrien bzw. deren Wiederherstellung und andererseits um ein Zerstören oder Auflösen von solchen Symmetrien im übertragenen Sinn.
Bei der Bruchungleichung können doch die 3 im Zähler auf der rechten Seite und die drei Einsen in den Zählern auf der linken Seite zumindest als auffällig angesehen werden. Was liegt näher als eine Zerlegung der 3 in drei Einsen, was wiederum einen paarweisen Vergleich zwischen z.B. 1/(a+b) und 1/(a+b+c) ermöglicht, der stets zugunsten der linken Seite ausfällt, für positive a,b,c und d.

4.3.3. Das Extremalprinzip

Ein Anwendungsfeld zu diesem Prinzip ist sicherlich die Optimierung, wenn es um die grundsätzlichen Denkweisen geht.

4.3.4. Das Transformationsprinzip

Mit diesem Prinzip soll der Aspektwechsel gestützt werden. Die Geometrieaufgabe bietet eine solche Gelegenheit.
Lösung durch Spiegelung (Verdopplung) der 3 Quadrate:



Die entstandenen gleichschenkligen Dreiecke lassen sich so sehr gut bezüglich der Winkelbeziehungen auswerten.

5. Zur Gestaltung eines Mathematikunterrichts mit integriertem Problemlösenlernen

Die drei heuristischen Hilfsmittel **informative Figur, Tabelle und Gleichung** eignen sich besonders gut, den Mathematisierungsprozess bei Sachaufgaben zu unterstützen und eine Aufgabensituation auf das Wesentliche zu reduzieren bzw. geeignet zu strukturieren.
Als besonders hilfreich hat es sich erwiesen, wenn anhand einer geeigneten Musteraufgabe alle drei heuristischen Hilfsmittel nacheinander vorgestellt werden. In Mathe-Welt ist es die „Busplätzeaufgabe“, die diese wichtige Orientierungsfunktion z.B. für Klasse 7 und 8 übernehmen kann. Ab Klasse 8 und 9 eignen sich aber auch Treffpunktaufgaben für das Kennenlernen aller drei Lösungsvarianten, vgl. Kasten 3. Anschließend sollten die Lernenden alle drei Hilfsmittel an ähnlichen Aufgaben selbst ausprobieren um dann relativ schnell eigene Präferenzen zu erkennen und diese als ihre Stärken anzuerkennen und auszubauen.
Der Vorteil dieses Vorgehens liegt in der Vernetzung algebraischer und geometrischer Wissenselemente und einer besonders überzeugenden Förderung von Mathematisierungsfähigkeiten.
Ein solches Vorgehen, das die Wahl der Lösungswege ganz den Schülerinnen und Schülern überlässt, hat aber auch Konsequenzen für den schriftlichen Leistungstest. Hier muss bei einigen Aufgaben der Lösungsweg frei gestellt werden: Eine systematische Probierlösung mit einer Tabelle darf dann nicht geringer geschätzt werden als eine Gleichungslösung oder eine grafische Näherungslösung, sofern die Genauigkeitsanforderungen aus der Aufgabenstellung beachtet wurden. HEUREKA-Effekte erhalten so wieder eine Chance!

Heurismen kann man erlernen - in vier Etappen
Im Unterschied zum Erlernen eines mathematischen Verfahrens z.B. zum Lösen von linearen Gleichungssystemen verläuft das Erlernen von Heurismen über vier Etappen, die einen längeren Zeitraum mit kurzen punktuellen aber aufeinander aufbauenden Lernphasen in Anspruch nehmen, siehe Kasten 3.
Die Heuristik lässt sich nicht in eine Unterrichtseinheit sperren – sie sollte permanent präsent und abrufbar sein, um ihre Funktion als wirksame Orientierungshilfe beim Problemlösen erfüllen zu können.

Eingedenk konstruktivistischer Auffassungen vom Lernen müssen sich die Schülerinnen und Schüler ihr eigenes Problemlösemodell erarbeiten. Dafür werden sie aufgefordert, neu kennen gelernte Heurismen in das bisherige Modell mit eigenen Fragestellungen sowie Musteraufgaben mit „Eselsbrückenfunktion“ zu integrieren.

Eine besondere Rolle für das Erkennen vielfältiger Beziehungen einzelner Themengebiete untereinander spielen die speziellen heuristischen Prinzipien wie Zerlegung, Invarianzprinzip, Extremalprinzip und Symmetrieprinzip.

Vorstellen bzw. Entdecken einer Strategie an einem Musterbeispiel („Eselsbrückeneffekt")

Bewusste Strategieanwendung auf Wahlaufgaben mit variierenden Kontexten

Vorstellen alternativer Lösungswege mit verschiedenen heuristischen Hilfsmitteln

Übungen mit Vorgehensreflexion und Erkennen individueller Präferenzen bei der Strategieanwendung

Gesondertes Üben von Teilhandlungen des Problemlösens (Lösungsansätze finden, Hilfslinien oder Hilfsgrößen suchen u.ä.)

Zuordnen geeignet erscheinender Strategien zu Problemaufgaben, ohne alle zu lösen

Erarbeiten individueller Problemlösemodelle mit der Fragetechnik

Grundidee

Wesentliche Bedingungen für das Entstehen von Lernhandlungen:
Lernaufgaben (Handlungsaufforderungen - was ? warum das?)
Orientierungsgrundlagen für die erforderlichen Handlungen (wie kann ich vorgehen?)

Zentrale Idee:
Problemlösekompetenzen erwerben
durch Förderung geistiger Beweglichkeit über das Ausbilden von *Teilhandlungen* des Problemlösens
in Verbindung mit *heuristischen Hilfsmitteln, speziellen Prinzipien und allgemeinen Strategien*.

Gewöhnen an heuristische Methoden und Techniken (**Reflektion)**

Bewusstmachen einer speziellen Methode oder Technik anhand eines markanten Beispiels **(Strategiebereitstellung)**

einübendes reflektiertes Transferieren
(Kontexterweiterung der Strategieanwendung)

Unterrichtsrealität:- zu wenig kreativitätsfördernde Lernanforderungen einerseits und - andererseits genügt es nicht, die Lernenden mit Problemen nur zu konfrontieren und dann zu hoffen, dass diese auch bewältigt werden !

Im Unterricht nicht nur Lernanforderungen stellen, sondern auch zu deren Bewältigung befähigen.

Neben einem flexiblen und vernetzten Grundwissen und entsprechendem Können
werden fachspezifische und allgemeine Methoden und Techniken zum Problemlösen
mit mathematischen Mitteln benötigt, also

“heuristische Bildung” **!**

Erlernen von Heurismen in vier Etappen

1.Etappe
Die Lernenden werden an bestimmte heuristische Vorgehensweisen und die typischen Fragestellungen schrittweise **gewöhnt**. Die Lehrkraft verwendet konsequent bei Hilfeimpulsen die Fragestrategien der einzelnen Heurismen ohne sie direkt zum Unterrichtsthema zu machen.

Beispiel: Analogieprinzip
Lehrerimpulse:

- Wie sind wir in ähnlichen Situationen vorgegangen?
- Was kommt euch an dieser Aufgabe bekannt vor?
- Vergleicht die letzten Aufgaben(lösungen) miteinander – welche Gemeinsamkeiten gibt es?

2.Etappe
Die explizit zu erlernenden Strategien werden anhand von **Musteraufgaben** für die jeweilige Klassenstufe entwickelt bzw. vorgestellt. Die Strategie erhält einen Namen und wird mit typischen Fragestellungen beschrieben. Die Musteraufgabe fungiert als Eselsbrücke. Gemeinsam werden Beispiele zusammen gestellt, bei denen die jetzt bewusst gewordene Strategie bereits früher intuitiv verwendet wurde.

pop up **Musteraufgabe** **pdf- Datei: Musterbewegungsaufgabe**

3.Etappe
Es schließen sich (kurze) **Übungsphasen** mit Aufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit an, in denen erwartet wird, dass die neue Strategie selbständig bewusst angewendet wird. Die Aufgabenkontexte variieren schrittweise. Die individuellen Vorlieben für einzelne Strategien und die Anwendungsvielfalt der neuen Strategie sollen thematisiert und damit bewusst werden.

4.Etappe
In nachfolgenden Übungsphasen wird eine schrittweise unterbewusste **flexible Strategieverwendung** angestrebt.

Die neue Strategie erhält ihren Platz in den allgemeinen Vorstellungen, wie man Probleme löst – im **allgemeinen Problemlösemodell** (nach Polya).

Und schließlich verhelfen weiter führende Überlegungen, ein Variieren/Abwandeln der Aufgabe zu vertieften Einsichten:

Heuristische Strategien kann man nur durch Selbsterfahrung erlernen, wenn man sie nicht schon intuitiv beherrscht.

Költzsch (1979) hat methodische Regeln benannt, die eine heuristische Lehrmethode beschreiben:

- Schülern niemals Lösungswege aufdrängen, sondern sie immer selbst suchen lassen und dabei das Suchfeld immer weiter einengen
- Nicht theoretisieren, sondern jede Strategie, Regel oder Regelsystem an geschickt gewählten Beispielen einführen.
- Förderung des Impulsgebens und Fragenstellens von Schüler zu Schüler.

Es erweist sich auch als besonders wichtig, in welchem Kontext man eine Strategie kennen lernt. Diese Strategien sind nämlich nicht beliebig transferierbar. Man muss also schon sehr genau überlegen, an welchen Beispielen man eine neue Strategie entwickelt. Die Strategie bleibt dann nämlich relativ fest an diesen einführenden Kontext gebunden. Das kann man aber auch wieder ausnutzen, indem man den Einführungsaufgaben z.B. einen bildhaften Namen gibt und sie als Eselsbrücken bewusst verwendet, um an bestimmte Vorgehensweisen in anderen Zusammenhängen wieder zu erinnern und so einen Transfer zu unterstützen.

5.2. Wo haben Problemaufgaben und Problemlösenlernen ihren Platz in einer Unterrichtseinheit?

Wenn wir von einem weiten Aufgabenbegriff ausgehen, mit dem die verschiedensten Aufforderungen zum Lernhandeln erfasst werden, kann man Unterrichtsgestaltung als „Arbeiten mit Aufgaben“ beschreiben. Das umfasst dann das Konstruieren bzw. Auswählen und die Art und Weise des Stellens der Aufgaben bis hin zur Art der Begleitung der Lernenden während der gesamten Aufgabenbearbeitung.

Allerdings ist das Kriterium der „Offenheit“ einer Aufgabe wiederum allein nicht ausreichend, um entwicklungsgemäße und entwicklungsfördernde Schülertätigkeiten in Gang zu setzen.
Viele offene Aufgaben unterfordern die Lernenden, wenn es nur darum geht, vielfältige Tätigkeiten auszuführen ohne definierte Ansprüche und Erwartungen.

Benötigt werden z.B. Aufgaben in Form von aufgabenhaltigen Situationen (Girmes) aber mit angemessenem Anspruch an die geistigen, motorischen oder sozialen Aktivitäten.
Untersuchungen von Weinert zeigen, welche Lehr- und Lernmethoden bzw. -tätigkeiten für unterschiedliche Zielkategorien beim Lernen besonders gut geeignet sind.

Kontrolle und Bewertung vgl. auch Bruder/Weigand (2001)
Wir betrachten Aufgaben mit unterschiedlicher Zielstruktur.

Eine Aufgabe besteht immer aus drei Komponenten – einer Ausgangssituation, einer Endsituation und Transformationen der Ausgangs- in die Endsituation.

Bild mit Start/Ziel und Nebel auf dem Weg oder ähnliches

-	-	x	Umkehrung einer Bestimmungsaufgabe: Ein neuer Zelttyp soll entwickelt werden für 3 Personen mit einem umbauten Luftraum von $1m^3$ pro Person und einer Liegefläche von 0,8m x 1.80m pro Person.
x	-	x	eine Strategiefindungs- oder Begründungsaufgabe Beim Nimm-Spiel gewinnt Frank immer. Wie macht er das? Spielregeln: 20 Hölzer liegen auf dem Tisch. Abwechselnd darf jeder Mitspieler 1,2 oder 3 Hölzchen wegnehmen. Wer die letzten Hölzchen wegnehmen kann, hat gewonnen.

Warum beträgt die Innenwinkelsumme im Dreieck immer 180°?

- x - Eigenkonstruktionen- Anwendungen finden:
Erfinde Beispielaufgaben zu den drei Grundaufgaben der Prozentrechnung.

- - (-) offene Aufgabensituation

Wie lange dauert ein Wasserwechsel im Schwimmbad?

Warum ***musste*** die Kugel aus purem Gold im Märchen vom Froschkönig der Prinzessin aus der Hand fallen?
Was könnte man an der Kugel variieren, so dass wichtige Aussagen des Märchens noch gelten und die Prinzessin bequem mit einer goldenen Kugel spielen konnte?
(Lösungsideen: Eine Kugel aus purem Gold von 10cm Durchmesser wiegt etwa 10kg! Mögliche Alternativen: Hohlkugel, eine Legierung verwenden, die leichter ist oder eine Goldkugel in Tennisballgröße).

Besonders interessant wird diese Tabelle dann, wenn man versucht, zu einem gegebenen Thema Aufgaben aller 8 Typen zu konstruieren. Dabei wird deutlich, dass die verschiedenen Aufgabentypen jeweils mit bestimmten Aspekten des Lernens im Sinne von Verstehen und Anwenden korrespondieren: Man hat das Wesen eines Verfahrens oder einer Methode viel besser verstanden, wenn man in der Lage ist, Situationen anzugeben, bei denen das neue Verfahren sinnvoll angewendet werden kann. Darüber hinaus sollten die Anwendungsbedingungen auch thematisiert werden. Die Lernenden werden dazu aufgefordert eine (nicht triviale) Situation anzugeben, in der das neue Verfahren **nicht** angewendet werden kann. Bekannt ist dieser Aufgabentyp z.B. aus dem Spiel TABU, bei dem Begriffe unter Ausschluss bestimmter Wörter beschrieben und von den Mitspielern erraten werden müssen. Ein anderes Beispiel: Konstruiere einen quadratischen Term, der **nicht** mit Hilfe binomischer Formeln vereinfacht werden kann.

Mit Hilfe dieser 8 Aufgabentypen kann etwas gelingen, das aus lernpsychologischer und erziehungswissenschaftlicher Sicht immer wieder gefordert wird: Ein Wechsel der Blickwinkel und Vernetzungen innerhalb eines Themas. Deshalb sollten in jeder Unterrichtseinheit möglichst alle 8 Aufgabentypen insbesondere auch für eine selbständige Bearbeitung durch die Lernenden vorkommen – allerdings mit unterschiedlicher Gewichtung. Die 8 Typen decken verschiedene Schwierigkeitsgrade ab und enthalten einen hohen Reflexionsanteil durch die Fragen zur Zielumkehr (- x x), (- - x) und den Aufgabentyp zum Selberkonstruieren von Aufgaben (- x -). Aber auch das Untersuchen einer bereits gelösten Aufgabe auf mögliche Fehler bietet die Möglichkeit, vertiefte Einsichten über den Lerngegenstand zu gewinnen.

Arbeiten mit Aufgaben umfasst

- das Auswählen bzw. Konstruieren, Variieren, Anordnen, Lösen, Vergleichen, Werten und Stellen von Aufgaben durch den Lehrer /die Lehrerin

- das Finden, Verändern, Vergleichen, Stellen und Lösen von Aufgaben durch die Schüler/innen und das Begleiten dieses Prozesses durch den Lehrer/die Lehrerin.

Sind diese vielfältigen Tätigkeiten gemeint, sprechen wir aus Schülersicht vom **Bearbeiten einer Aufgabe** im Gegensatz zum bisher am häufigsten erwarteten Lösen einer gestellten Aufgabe.

Damit kann das Arbeiten mit Aufgaben im Unterricht folgende **Funktionen** ausüben:

- Aufgabenbearbeiten als ***Mittel*** (Weg) zur Aneignung von Wissen und Können

- Aufgabenbearbeiten als ***Diagnoseinstrument*** für Verlauf und Ergebnisse im Lernprozess

- Fähigkeiten im Aufgabenbearbeiten (Problemlösen) als Können***ziel.***

Warum sollen die Schülerinnen und Schüler auch Fähigkeiten im Aufgabenbearbeiten im Sinne der oben genannten Tätigkeiten erwerben?
Genügt es nicht, klug ausgewählte und z.B. an einzelnen Stationen ausgelegte Aufgaben zu lösen?
Das Finden, Verändern und Vergleichen von Aufgaben durch die Lernenden geht über das Stellen und Lösen üblicher Lehrbuchaufgaben deutlich hinaus ohne automatisch schwieriger zu sein. Es sind etwas andere Anforderungen, die aber die eingangs formulierten Forderungen nach Übernahme von Verantwortung für das eigene Lernen und Nachdenken über das eigene Vorgehen erfüllen können.

Finden, Verändern und Vergleichen von Aufgaben sind Aufforderungen, die auf einer Metaebene liegen. Es sind eigentlich Aufgaben über Aufgaben!

Das Finden von eigenen Aufgabenbeispielen wurde schon in der Aufgabentypisierung im Kasten 1 erfasst. Dieser Aufgabentyp ist besonders gut für Zusammenfassungen und Systematisierungen aber auch für systematische Wiederholungen zu länger zurückliegendem Stoff geeignet.

Das Variieren von Aufgaben durch die Lernenden lässt sich in Vorbereitung auf eine Lernkontrolle gut begründen: Wenn man in der Lage ist, selbständig eine Aufgabe umzuformulieren, einen anderen Aspekt in die Fragestellung zu bringen, dann gibt es weniger Probleme mit ungewohnten Aufgabenstellungen. Es kann leider immer wieder beobachtet werden, dass viele Schülerinnen und Schüler auf eine bestimmte Art der Fragestellung fixiert sind und sich bereits bei kleinen Formulierungsänderungen hilflos fühlen. Bei einem Lehrerwechsel können solche Phänomene besonders deutlich auftreten. Um mehr Flexibilität zu gewinnen, sollten die Schülerinnen und Schüler explizit lernen, wie man sinnvolle Fragen stellen kann bzw. wofür man sich in den einzelnen Wissenschaftsdisziplinen überhaupt interessiert.

Eine besondere Bedeutung kommt dem Vergleichen von Aufgaben zu. Es sind tatsächlich Aufgaben gemeint, nicht ihre Ergebnisse! Haben die Lernenden mehrere Aufgaben oder Aufträge hintereinander bearbeitet und die Ergebnisse verglichen oder vorgetragen, werden diese Aufgaben und ihre Lösungen meist ohne weitere Aktivitäten beiseite gelegt. Aber eigentlich beginnt doch hier erst der Erwerb verfügbaren Wissens und Könnens! Werden die Schülerinnen und Schüler nämlich jetzt aufgefordert Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den gerade bearbeiteten Aufgaben herauszufinden, müssen die Aufgaben noch einmal von einer anderen Warte aus angesehen werden. Es können dann die Fragestellungen miteinander oder aber die Lösungswege und ggf. auch die Resultate z.B. bzgl. ihrer Existenz und Eindeutigkeit miteinander verglichen werden. Ziel ist es, den Kern der Fragestellungen zu erfassen: Worum ging es in den Aufgaben? Welche Begriffe, Verfahren und welche Lösungsmethoden und Strategien waren hilfreich?

Eine solche Arbeit mit Aufgaben verlangt für die wichtigen Reflexionsphasen vorausschauendes Arbeiten und eine sensible Anleitung der Lernenden auch im frontalen Unterrichtsgespräch durch die Lehrerinnen und Lehrer. Entsprechende Metaaufgaben zum Vergleichen von Aufgaben können in höheren Klassenstufen aber auch im Rahmen von selbständig zu bearbeitenden Lernprotokollen bzw. in Lerntagebüchern Eingang finden. Geeignete Methoden und Organisationsformen gibt es viele- entscheidend ist zunächst die Qualität der Lernanforderung. Dafür bieten die 8 Aufgabentypen in Verbindung mit dem Variieren und Vergleichen von Aufgaben eine solide Basis.

Literaturverzeichnis

Abels, L.(2002): Ich hab's – Tipps, Tricks und Übungen zum Problemlösen. Mathe-Welt-Beilage in mathematik lehren 115 aus: Wiss. Hausarbeit an der TU Darmstadt 2000: „Ein Trainingskonzept zur Entwicklung mathematischer Problemlösekomptenzen"

Baumert u.a. (1997): TIMSS - Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Deskriptive Befunde. Opladen: Leske + Budrich.

Baumert u.a. (Hrsg) (2001): PISA 2000. Opladen: Leske + Budrich

Bruder, R., Gürtler,T., Perels,F., Schmitz, B.: Problemlösenlernen in Verbindung mit Selbstregulation. In: mathematik lehren 115 (2002), S. 59-62

Bruder, R.(2002): Lernen, geeignete Fragen zu stellen. Heuristik im Mathematikunterricht. In: mathematik lehren 115, S.4 - 8

Bruder, R. (2001a): Mathematik lernen und behalten. In: Heymann, H.-W. (Hrsg.): Lernergebnisse sichern. In: PÄDAGOGIK, Heft 10, S. 15 -18

Bruder, R., Weigand, H.-G.: Leistungen bewerten- Natürlich! Aber wie? In: mathematik lehren 107 (2001), S.4 - 8

Bruder, R.(2001b): Verständnis für Zahlen, Figuren und Strukturen. In: Heymann, H.-W.(Hrsg.): Basiskompetenzen vermitteln. In: PÄDAGOGIK, Heft 4, S.18-22

Bruder, R.(2000a): Eine akzentuierte Aufgabenauswahl und Vermitteln heuristischer Erfahrung - Wege zu einem anspruchsvollen Mathematikunterricht für alle.-In: Flade/Herget (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen nach TIMSS - Anregungen für die Sekundarstufen.- Berlin: Volk und Wissen

Bruder, R. (2000b): Problemlösen im Mathematikunterricht - ein Lernangebot für alle? In: Mathematische Unterrichtspraxis, Heft1/2000, S.2-11

Bruder,R.(2000c): Konzepte für ein ganzheitliches Unterrichten.- In: mathematik lehren 101, S. 4 - 11

Bruder, R. (2000d): Mit Aufgaben arbeiten.- In: mathematik lehren 101, S. 12 - 17

Bruder, R. (1999): Möglichkeiten und Grenzen von Kreativitätsentwicklung im gegenwärtigen Mathematikunterricht.-In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1999. Vorträge auf der 33.Bundestagung für Didaktik der Mathematik in Bern, S. 117 - 120

Bruder, R. (1997a):Pralinenschachtel, Kinobesuch und fliegende Objekte. Kontext für Binnendifferenzierung. In: mathematik lehren 89, S. 54 - 57.

Bruder, R. (1997b):Kräutergarten und Konfektverpackung - Optimieren in einer 8.Klasse. In: mathematik lehren Heft 81, S. 11 - 16.

Bruder, R. (1994): Im Mathematikunterricht heuristische Erfahrungen gewinnen - am Beispiel des Invarianzbegriffs. In: Beiträge zum Lernen und Lehren von Mathematik. Festschrift zur Emeritierung von Martin Glatfeld, Seelze, S. 18 -26

Bruder, R.(1993): Verlaufseigenschaften des Denkens im Mathematikunterricht erkennen und fördern. In: mathematik lehren, Heft 56, S.20 - 56

Bruder, R. (1992): Problemlösen - aber wie? In: mathematik lehren, 52, S. 6 - 12

Gürtler,T./Perels,F./Schmitz,B./Bruder,R.: Training zur Förderung selbstregulativer Fähigkeiten in Kombination mit Problemlösen in Mathematik.-In: Zeitschrift für Pädagogik, 45.Beiheft 2002, S.222-239

Hasdorf, W.(1976): Erscheinungsbild und Entwicklung der Beweglichkeit des Denkens bei älteren Vorschulkindern. In: J. Lompscher: Verlaufsqualitäten der geistigen Tätigkeit, Berlin: Volk und Wissen

Helmke; A./JÄGER, R.S.(2001): Erster Ergebnisbericht MARKUS. Mathematik-Gesamterhebung Rheinland-Pfalz: Kompetenzen, Unterrichtsmerkmale, Schulkontext. Landau: Universität Landau und Zentrum für empirische pädagogische Forschung (www.uni-landau.de/~helmke/)

Lehmann, G. (1990): Die Vermittlung heuristischer Strategien im Mathematikunterricht. In: Finden, Erfinden, Lernen: Zum Umgang mit Mathematik unter heuristischen Aspekten, Glatfeld (Herausgeber), Frankfurt a.M.

Lompscher,J.(1972): Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Entwicklung geistiger Fähigkeiten. Berlin: Volk und Wissen

Lompscher, J. (1976): "Verlaufsqualitäten der geistigen Tätigkeit", Berlin: Volk und Wissen

Meyer, Richard E.: "Denken und Problemlösen: eine Einführung in menschliches Denken und Lernen.", Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979

Peter,C., Winkelmaier,C.: Zugang zum Invarianzprinzip über Tabellen. In: mathematik lehren 115, S.10-13

Polya, G.(1949): Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme. Francke: Tübingen und Basel

Polya,G.(1965): Mathematical discovery (Vol.2). New York: Wiley

Polya,G.(1981): Combined, Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving. John Wiley & Sons

Winter,H.(1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik Nr.61, S.37-46