

Mathematik verstehen, **behalten** und
anwenden – Konsequenzen für
Lerninhalte und Lehrmethoden im
computergestützten MU

Prof.Dr. Regina Bruder TU Darmstadt
www.math-learning.com

Was sich **Lernende** wünschen und vorstellen:

- vorurteilsfreie Lehrer/innen, die gut erklären können
- ernst genommen werden und etwas „Sinnvolles“ lernen (müssen)
- Lernchancen erhalten – toleranter Umgang mit Fehlern und klare Orientierungen
- ein harmonisches Lernumfeld und gerechte Beurteilungen



1. Was ist das Wesentliche, das im MU verstanden, **behalten** und **angewendet** werden sollte?

CAS-Einsatz führt zu Akzentverschiebungen in den Lerninhalten

2. Wie kann man Mathematik in einem computergestützten Unterricht so lernen, dass die zentralen Inhalte verstanden, **behalten** und **angewendet** werden können?

Was soll durch Mathematikunterricht von der Mathematik

verstanden,

Mathematische Gegenstände ... als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art ... begreifen.

behalten und

Problemlösefähigkeiten (heuristische Fähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen)

angewendet
werden können?

Erscheinungen der Welt um uns ... in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen.

Vgl. die drei Grunderfahrungen bzgl. Mathematik nach H.Winter 1995

1. Was ist das Wesentliche...

Themenfelder für vernetztes Lernen

Anwendungslinien als Stützen der Curriculumspirale

- Umgehen mit Geld...
- Anteile beschreiben und vergleichen (Brüche, Dreisatz, Prozentrechnung, Streckenteilung/Goldener Schnitt...)
- **Optimieren**
- Entfernung unzugänglicher Punkte bestimmen
- Zuordnungen beschreiben (Wachstum/Zerfall)
- Beziehungen zwischen Zahlen und Figuren beschreiben
 - Visualisierungen (Mittelwerte...)
 - Kongruenz – Ähnlichkeit...
- Figuren erzeugen in Ebene und Raum
- Zufall beschreiben...

1. Was ist das Wesentliche...

Anwendungslinie Optimieren am Beispiel Verpackungen

- Quadrat als Viereck mit kleinstem Umfang bei gegebenem Flächeninhalt (isoperimetrisches Problem)
- Kreis als randlängenoptimale Figur – analog im Raum: Kugel
- Mittelungleichung für Min/Max-Abschätzung $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$
- Quadratische Zusammenhänge: Scheitelpunktsbestimmung
- Graphen untersuchen**, um Extrema näherungsweise zu bestimmen
- Methoden der Differentialrechnung**

**Ein Volumen von 1 Liter Wasser soll
„verpackt“ werden!**

Es sind Bedingungen für eine minimale Oberfläche bei verschiedenen gegebenen Körperformen zu finden!

Mögliche Körperformen:

Kugel, Zylinder, Würfel, Kreiskegel,

Prisma mit gleichseitigem Dreieck als
Grundfläche,

Pyramide mit quadratischer
Grundfläche,

Tetraeder

Ein Volumen von 1 Liter Wasser soll verpackt werden!

Körper

Optimale Verpackung

Kugel

$$A = 4 \cdot \pi r^2$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi}}$$

$$A = 483,60 \text{ cm}^2$$

Zylinder

$$A = 2 \cdot \pi r^2 + \frac{2 \cdot V}{r}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2 \cdot \pi}}$$

$$A = 553,58 \text{ cm}^2$$

Würfel

$$A = 6 \cdot a^2$$

$$a = \sqrt[3]{V}$$

$$A = 600 \text{ cm}^2$$

Kreiskegel

$$A = \pi r^2 + \sqrt{\frac{9 \cdot V^2}{r^2} + \pi^2 \cdot r^4}$$

$$r = \sqrt[6]{\frac{9 \cdot V^2}{8 \cdot \pi^2}}$$

$$A = 609,30 \text{ cm}^2$$

Ein Volumen von 1 Liter Wasser soll verpackt werden!

Prisma mit gleich-
seitigem Dreieck als

Grundfläche

$$A = \frac{a^2}{2} \cdot \sqrt{3} + \frac{12 \cdot V}{a \cdot \sqrt{3}}$$

$$a = \sqrt[3]{4 \cdot V}$$

$$A = 654,57 \text{ cm}^2$$

Pyramide mit
quadratischer
Grundfläche

$$A = a^2 + \sqrt{a^4 + 36 \cdot \frac{V^2}{a^2}}$$

$$A = 660,39 \text{ cm}^2$$

Tetraeder

$$A = a^2 \cdot \sqrt{3} \quad a = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot V}{\sqrt{2}}}$$

$$A = 720,56 \text{ cm}^2$$

Effekte der rechnergestützten Bearbeitung des Problems:

Ein Volumen von 1 Liter Wasser soll „verpackt“ werden!

- Einsicht in die Notwendigkeit bestimmter Differentiationsregeln (Kettenregel)
- auch Flächenfunktionen mit komplizierten Termen lassen sich leicht visualisieren und vergleichen
- Keine händischen Fertigkeiten im Differenzieren mehr notwendig
- Begrenztheit des Rechners – Modellierungsideen kann er nicht liefern

1. Was ist das Wesentliche...

Was soll verstanden, **behalten** und **angewendet** werden können?

a) **Anwendungslinien** (Themenfelder für vernetztes Lernen)

b) *Sinnhaftes Verstehen: Schrittweises Ersetzen didaktisch konstruierter Fragestellungen durch die „wirklichen“ Fragen- mit CAS*

Beispiel: Kurvendiskussionen ganz- und gebrochenrationaler Funktionen

Bisher: gegeben Funktionsterm – gesucht Graph und Eigenschaften

CAS: Problem ist per Knopfdruck gelöst

Alternative und „wirkliche“ Frage:

Gegeben ist eine Menge von Punkten – gesucht ist eine geeignete analytische Beschreibung (Funktionsterm)

1. Was ist das Wesentliche...

Gegeben ist eine Menge von Punkten – gesucht ist eine geeignete analytische Beschreibung (Funktionsterm)

Wo kommt das vor?

- aus Messreihen neue Zusammenhänge finden
- aus Daten Entwicklungsverläufe prognostizieren

Wie macht man das?

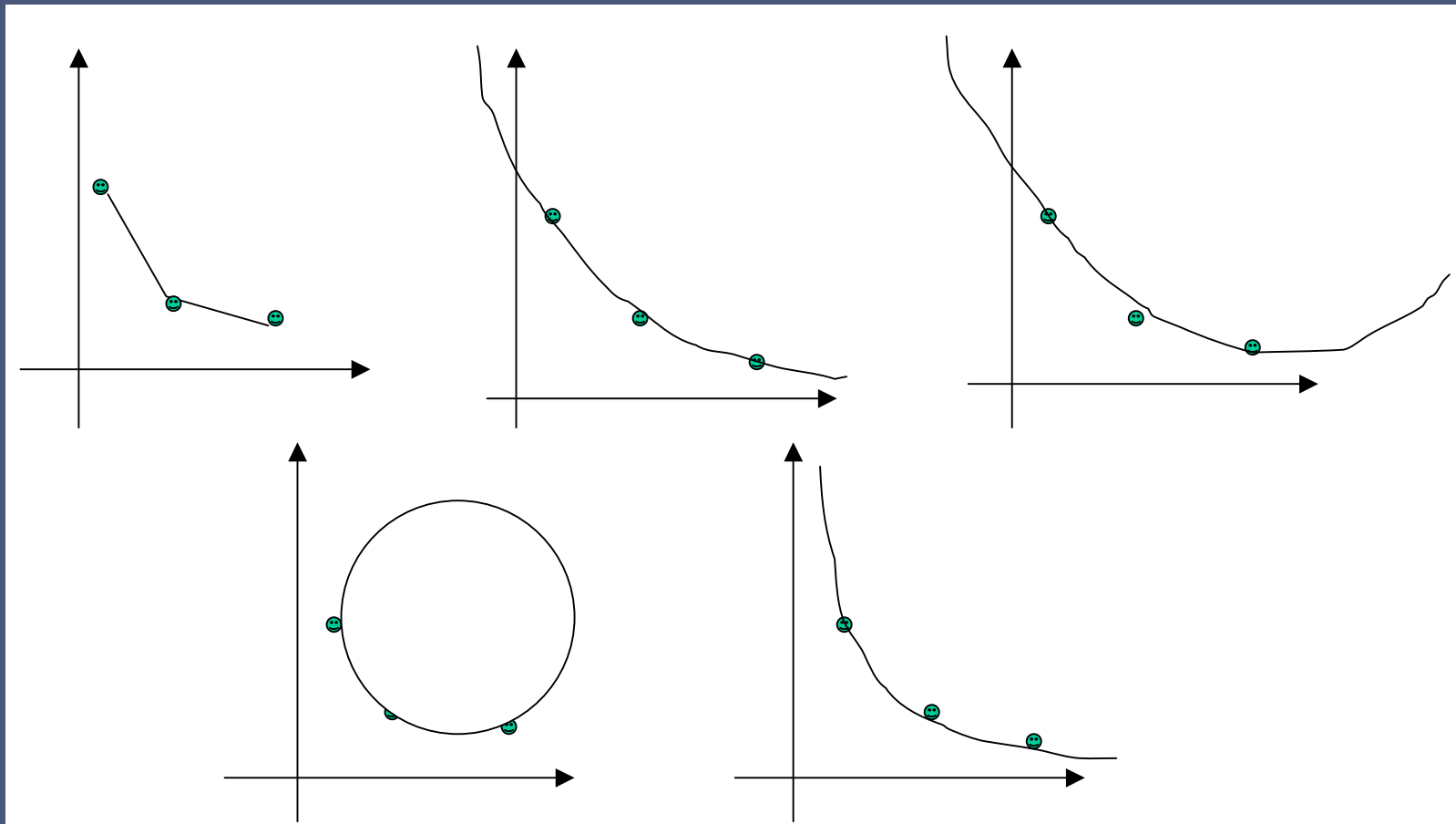
- Approximation, Regression...oder mit Bild-Wissen über bestimmte Funktionstypen!

Und im Unterricht?

- genetisch: Welche Möglichkeiten gibt es, analytisch beschreibbare Kurven durch 2 – 3 – 4 Punkte zu legen?

1. Was ist das Wesentliche...

Welche Möglichkeiten gibt es, analytisch beschreibbare Kurven durch 3 Punkte zu legen?



1. Was ist das Wesentliche...

Schlussfolgerungen für Akzentverschiebungen in den Lerninhalten

- Einüben von abrufbaren Vorstellungen über den prinzipiellen Verlauf von Basisfunktionen (Hyperbeln, Parabeln, Exponentialfunktion, Wurzelfunktion, Winkelfunktionen...) und Polynomfunktionen
- **Funktionen werden zu Mathematisierungsmustern für Modellierungsaufgaben**

Sinnvolle Erweiterungen für Projekte und besondere Lernleistungen: Funktionen zweier Veränderlicher, Splines und algebraisch beschreibbare Kurven (Korbbögen, Bezierkurven...)

1. Was ist das Wesentliche...

Phänomen: Durch den Einsatz von CAS werden die Aufgaben nicht „leichter“ vom mathematischen Anspruch her –

aber es gibt gleichzeitig mehr Chancen, mathematische Grundvorstellungen auszubilden!

Das Delegieren bereits prinzipiell verstandener Zusammenhänge und Verfahren an den Rechner schafft Freiräume für kreativen Umgang mit mathematikhaltigen Situationen.

Ziel des MU in der Oberstufe: als „gebildeter Laie“ Kommunikationsfähigkeit mit Experten erwerben

1. Was ist das Wesentliche...

Problem der SI:

Dass ein CAS eine **Solve(..)** Funktion besitzt, wird von den Schülern schnell entdeckt werden.

Sollte man sich im MU von dieser Funktion möglichst lange fern halten?

Edith Schneider aus Klagenfurt ist da anderer Meinung.

Sie prägte den Begriff des Auslagerns von Expertenwissen und sieht das Arbeiten mit einem CAS als Kommunikation mit einem Mathematikexperten.

Wir müssen allerdings lernen, die Fragen in der richtigen Fachsprache zu stellen.

Konsequenzen für die **sprachlich-logische Bildung** im MU!

Uli hat drei Murmeln weniger als Anja, und Bernd hat viermal so viele Murmeln wie Uli.

Mara sagt: „Egal wie viele Murmeln Uli hat – wenn er drei weniger als Anja hat und Bernd viermal so viele wie Uli, dann ist die Gesamtzahl der Murmeln bestimmt ungerade.“ Hat Mara recht?

Begründe!

$$X + (X - 3) \cdot 4 + (X - 3) \cdot 4 = X + X - 3 + 4X - 12$$

Ja sie hat recht.

Gib eine allgemeine Formel an wie man aus der A ...

Begründe!

Da Anja immer drei mehr als Uli hat ist es immer eine ungerade Zahl, da 3 ungerade ist

Begründe!

Ja, weil eine gerade Zahl mit einer ungeraden Zahl addiert immer eine ungerade Zahl erhält.

Verschiedene unvollständige Argumentationen

Uli hat drei Murmeln weniger als Anja, und Bernd hat viermal so viele Murmeln wie Uli.

Mara sagt: „Egal wie viele Murmeln Uli hat – wenn er drei weniger als Anja hat und Bernd viermal so viele wie Uli, dann ist die Gesamtzahl der Murmeln bestimmt ungerade.“ Hat Mara recht?

Begründe!

Ja, weil wenn Uli 4 hat (gerade) dann hat Anja 7 (ungerade) und Bernd 16 (gerade)

Gib eine allgemeine Formel an, wie man aus der Anzahl der Uli-Murmeln die Gesamtzahl der Murmeln bestimmen kann.

Lösung mit Fallunterscheidung:

Begründe!

Ja, Mara hat recht, denn wenn Uli eine ungerade Anzahl an Murmeln hat, haben Anja u. Bernd eine gerade Anzahl. Die Summe ist ungerade. Wenn Uli eine gerade Anzahl hat, ist die von Anja ungerade. Die Summe ist wieder ungerade.

1. Was ist das Wesentliche...

Was soll verstanden, behalten und angewendet werden können?

a) Anwendungslinien

b) Sinnhaftes Verstehen

Rechnereinsatz als Chance zu mehr sprachlogischer Kompetenz durch Anlässe zum Beschreiben von Vorgehensweisen oder beobachteten Phänomenen und bei Interpretationen von Resultaten

- aber nicht automatisch!

Erforderlich sind entsprechende Aufgabenstellungen und Reflektionsanlässe und die Entwicklung einer geeigneten „Sprache“ zum Rechnereinsatz.

Problem in den Unterrichtsmaterialien: Worin besteht der Zugewinn durch den Rechnereinsatz??

1. Was ist das Wesentliche...

Was soll verstanden, behalten und angewendet werden können?

a) **Anwendungslinien**

b) *Sinnhaftes Verstehen*

c) **Heuristische Bildung für mathematisches Problemlösen**

- Invarianzprinzip
 - *Suche in Unterschiedlichem das Gemeinsame! Was bleibt gleich?*
 - *Bildungsvorschrift bei Zahlenfolgen*
 - *Modellierungsansätze finden (Extremwertaufgaben...)*
- Symmetrieprinzip - Rechenvorteile beim bestimmten Integral, günstige Lage eines Koordinatensystems...

1. Was ist das Wesentliche..- Heuristische Strategien

- Zerlegungsprinzip
 - Begriff des bestimmten Integrals, Näherungsverfahren
- Kombiniertes Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten
- Transformationsprinzip
 - Variiere die Bedingungen!
 - Betrachte Gegebenes und Gesuchtes in verschiedenen Zusammenhängen!
 - Zerlege, ergänze oder verknüpfe mit Neuem!
 - Übergang in eine Modellebene (z.B. Vektoren)
Suche nach anderen mathematischen Beschreibungsmöglichkeiten für das Gegebene und Gesuchte!

Frankfurter Allgemeine Sonntagszeitung 19.10.2003

Jeder Autofahrer kennt das: Parklücke gefunden, aber kommt man auch hinein? Norbert Herrmann von der Universität Hannover hat jetzt die Formel gefunden, nach der man berechnen kann, ob der Platz reicht.

g ist dabei die benötigte Breite der Lücke, b der Abstand vom Automittelpunkt zum Autoende, f der Abstand vom Automittelpunkt zur Front, r der Radius des kleinsten Kreises, den der Automittelpunkt beschreiben kann und w die Breite des Autos.

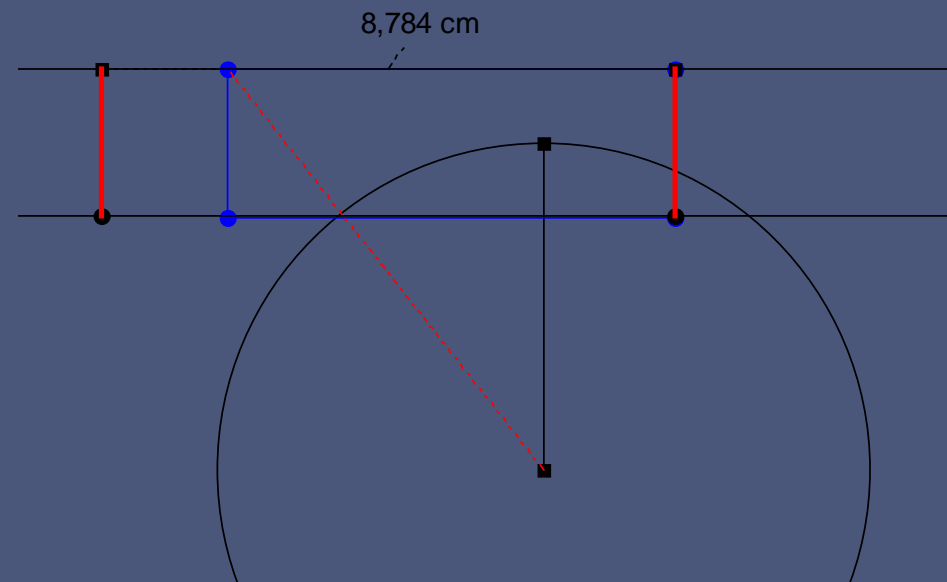
Kleiner Schwachpunkt: Die Formel setzt einen anfänglichen Abstand zum Nachbarauto von null Millimetern voraus.

Lösungsansatz:

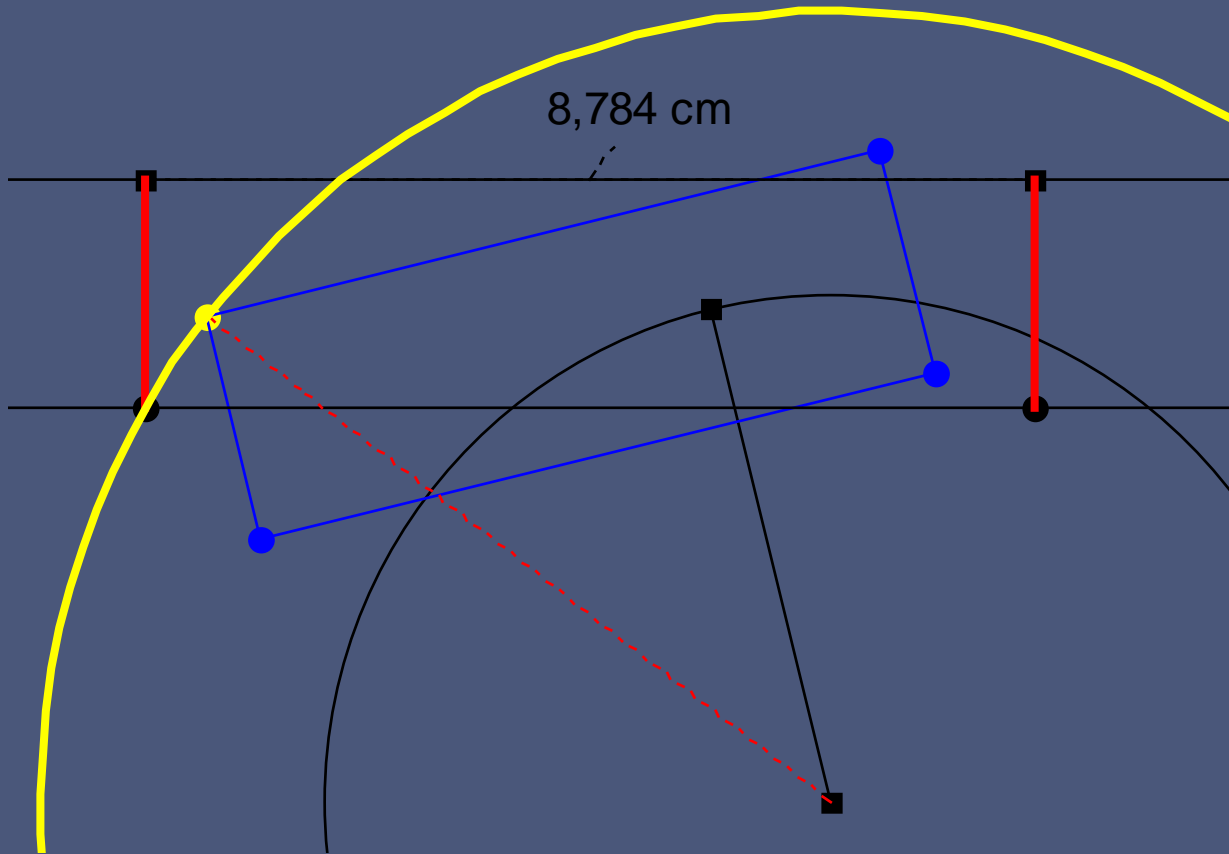
Bei der Simulation des Rangierens mit Hilfe von Karteikarten entstand die Idee, den Einparkvorgang rückwärts zu betrachten und durch einen Ausparkvorgang zu ersetzen



Das auszuparkende Auto steht erst mit seinem hinteren Ende direkt am Nachbarauto. Der Automittelpunkt soll dann auf dem Wendekreis mit dem angegebenen Radius bewegt werden. Der kritische Punkt ist erreicht, wenn die rechte Vorderseite das Heck des anderen Nachbarn beim Ausparken berührt. Dieser kritische Abstand muss eingehalten werden.



Abstandhinten + $\sqrt{2 \cdot \text{radius} \cdot \text{breite} + \text{sqr}(\text{Abstandvorne})}$
8,785





Zentrale Strategien:

Rückwärtsarbeiten

Extremalprinzip

Simulation mit DynaGeo als heuristischem
Hilfsmittel (dynamisches Visualisieren)

Anreicherung und Spezifizierung bereits bekannter
Strategien!

Problem: Es müssen mehr rechner-spezifische Begriffe
gelernt und behalten werden

2. Mathematik verstehen, behalten und anwenden lernen computergestützt – aber wie?

Wesentliche Bedingungen für das Entstehen von Lernhandlungen:

- **Lernaufgaben**

Handlungsaufforderungen: WAS? WARUM das?

- **Orientierungsgrundlagen** für die erforderlichen Handlungen

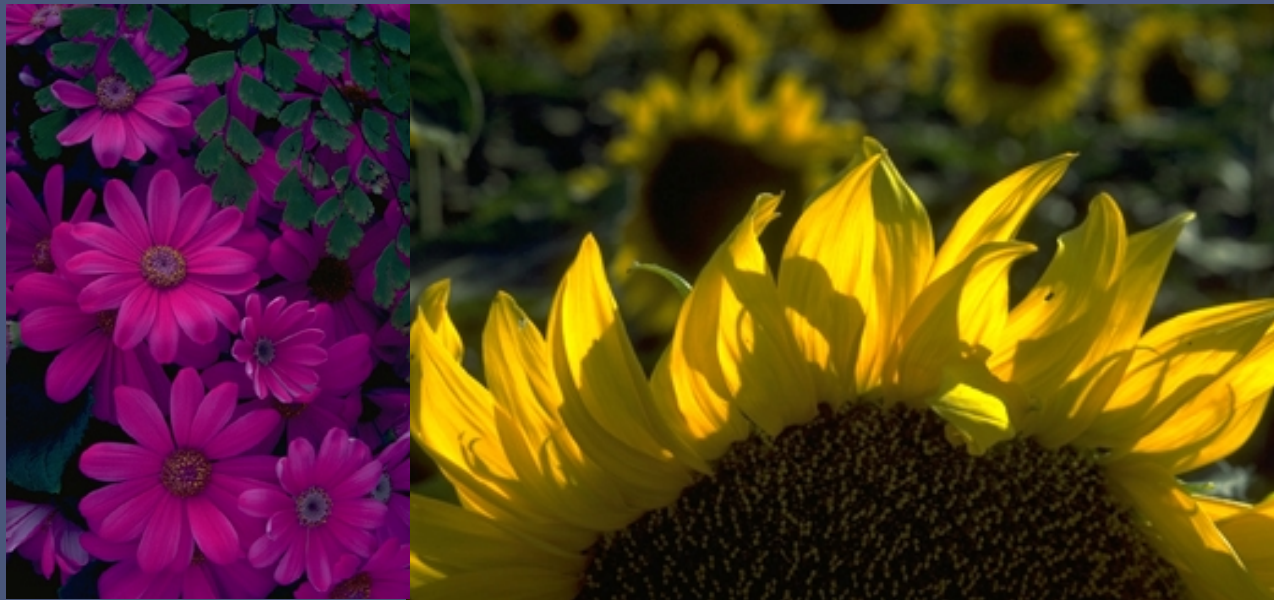
WIE kann ich vorgehen?

CAS im MU – ja, aber wie?

Aufgabenformate für nachhaltiges Lernen

Ein geschlossenes Einstiegsproblem wird schrittweise erweitert, verallgemeinert – in diesem Sinne *geöffnet*:

„*Blütenmodell*“ (z.B. PISA-Aufgaben)



Beispiel: Einführung der Exponentialfunktion in Klasse 10

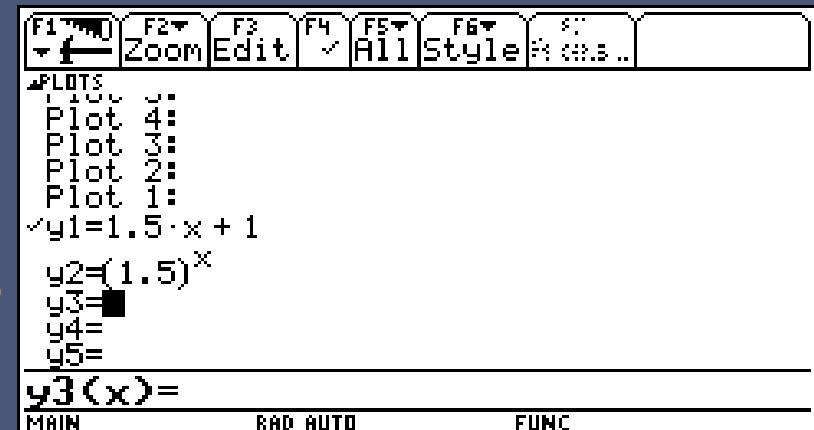
Zinseszins:

- a) Einstieg mit konkreten Daten
- b) Verallgemeinerung: Nach wie vielen Jahren x hat sich ein Kapital K mit Zinssatz p verdoppelt?

Ein neuer Gleichungstyp - Wie löst man das? **$1,5x + 1 = 1,5^x$**

Oder mit dem *Transformationsprinzip* neu interpretiert:

Wann holt eine Exponentialfunktion eine lineare Funktion ein?



CAS im MU – ja, aber wie?

$$1,5x + 1 = 1,5^x$$

graphisch interpretieren!

Die beiden Funktionen haben den Punkt (0/1) gemeinsam, verlassen ihn aber mit unterschiedlicher Steigung. Wo treffen sie sich wieder?

Diese Frage kann man prinzipiell auf drei verschiedene Arten zu beantworten versuchen:

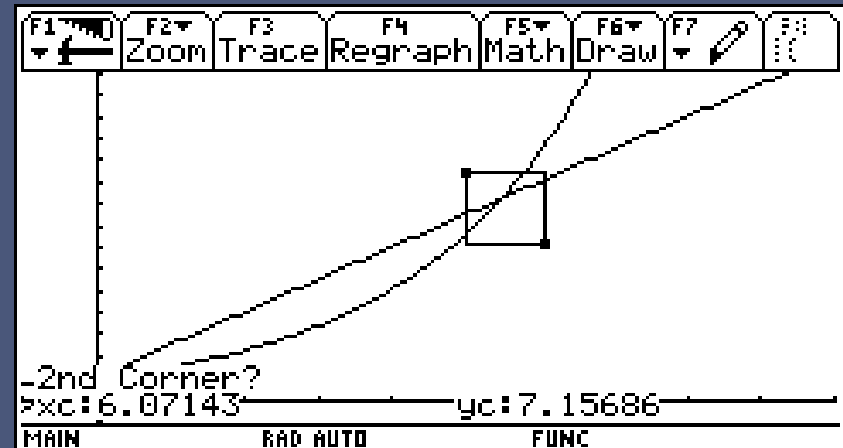
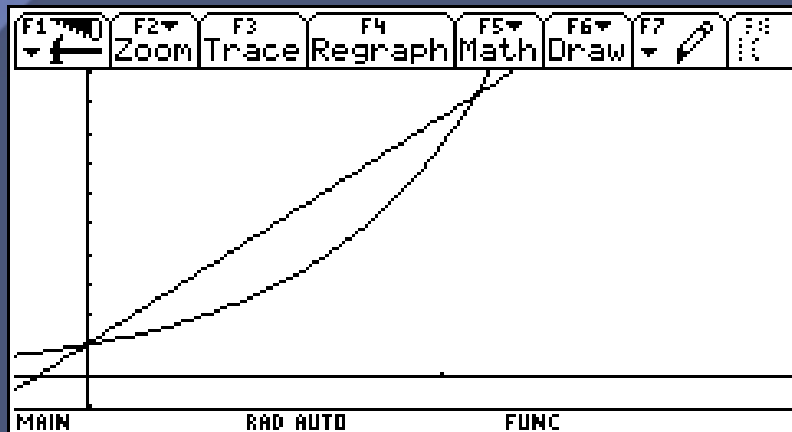
- Tabelle
- Zeichnung
- Formel

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Setup	Setup	Setup	Setup	Setup	Setup	Setup
x	y1	y2				
0.	1.	1.				
1.	2.5	1.5				
2.	4.	2.25				
3.	5.5	3.375				
4.	7.	5.0625				
5.	8.5	7.5938				
6.	10.	11.391				
7.	11.5	17.086				

x=7.

MAIN RAD AUTO FUNC

CAS im MU – ja, aber wie?



F1 (Left Arrow) F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clean Up

■ solve($1.5 \cdot x + 1 = (1.5)^x, x$)
 $x = 5.47764$ or $x = 0.$

solve(1.5x+1=1.5^x,x)

Warning: More solutions may exist

Beispiele: M. Distler 2002

Möglicher Zugewinn durch Rechnereinsatz im MU:

- parallele Visualisierung von algebraischen Ausdrücken und algebraischer Umformung,
- studieren der geometrischen Effekte algebraischer Umformungen (dynamisches heuristisches Hilfsmittel)

Variationen mit offenen Aufgaben – für sinnvollen CAS-Einsatz

Geschlossen formuliert, aber *viele Lösungswege*

(Vergleich und Würdigung der Lösungswege schwierig)

„*Blütenmodell*“ – **Expertenmethode** mit CAS

(schafft Entlastung im Unterricht)

„*Trichtermodell*“ - **Gruppenarbeit, Projektarbeit** –
arbeitsteiliges Vorgehen bei Zerlegungen und
„echten“ Modellierungen

(neue Kompetenzen gefordert: Kommunizieren, Präsentieren)

„Aktuelles“ Qualitätskriterium für den MU:

Art des Arbeitens mit Aufgaben im MU

Aufgabenqualität

**Lernpotential (erforderliche Schülertätigkeiten,
Strategien, mathematischer Gehalt)**

fachliche Korrektheit

**Motivationspotential (Sinn- und Sachbezüge,
Zielklarheit)**

Chance zur Binnendifferenzierung ...

Art des Stellens der Aufgabe

Begleitung der Aufgabenbearbeitung

Verstehen – **behalten** – anwenden können erfordert:

Zielklarheit:

Vergewissern, ob die „gestellten“
Lernziele mit den individuellen
Lernaufgaben übereinstimmen

Ausgangsniveau:

Vergewissern, ob die Lernenden eine
realistische Chance haben, die
Lernaufgabe zu bewältigen-
(permanente) **Grundlagenwiederholung** und
Schließen von Lücken

Unterrichtsmethoden z.B.:

Lernprotokoll

Mathe-Führerschein

**"Führerscheine" im MU - ein Übungskonzept zum
Wachhalten elementaren mathematischen Könnens
(auch in der Oberstufe)**

Voraussetzungen für ein verstandenes und flexibles
(kreatives) Umgehen mit Mathematik:

-u.a. ein solides Beherrschen und **Behalten** von
mathematischem **"Grundkönnen"**

Wie kann man es über die einzelnen Stoffgebiete und
Schuljahre hinweg wachhalten?

Trotz, wegen und mit Taschenrechner und Computer:

Wichtige **Lernziele** (auch in der Oberstufe):

Kopfrechnenkönnen
Kopfgeometrie
Grundvorstellungen

Vorgehen:

- regelmäßig konsequent vermischte wiederholende intelligente
Kopfübungen

Dreisatz, auch Maßstab

Maßstab: 1: 500.000 4cm werden gemessen – wie viele km sind das in der Natur?

Prozent- und Zinsrechnung

Jemand erhält am Jahresende 450 € Zinsen. Das Guthaben wurde mit 3% verzinst. Wie viel Geld wurde zum Jahresbeginn eingezahlt, das diese Zinsen gebracht hat? (EXCEL?)

Termumformungen (Schreibe ohne Klammern, Vereinfache...) und Formeln umstellen

Gleichungen:

Gib jeweils die Lösungsmenge im Bereich der reellen Zahlen an!

a) $6x - 1 = 2x + 15$

b) $0 = (x + 3)(x - 4)$

c) $2x^2 + 9 = 81$

d) $\sin x - 11 = 7$

e) $3y^3 - 17 = 2y^3 + 10$

f) $x^2 - 2x - 8 = 0$

Terme aus Texten aufstellen

Lineare Funktionen (Gleichung zum Bild aufstellen, Gerade skizzieren...)

Quadratische Funktionen

- Gleichungen gegebener Parabeln aufstellen
- Parabel mit geg. Gleichung ohne Schablone zeichnen

Umfang, Flächeninhalt und Volumen von Grundfiguren berechnen

Lineare Gleichungssysteme nach einem beliebigen Verfahren lösen

Körperdarstellungen (Schrägbild, Abwicklung)

Freie Bilder zeichnen – Schaubild einer Wurzelfunktion, Exponentialfunktion und Hyperbel...

Querfeldeintests zusätzlich zu den üblichen Lernkontrollen
Bestandteil der mündlichen Note

Sinnvoll:

In die normalen Klassenarbeiten Pflichtanteile aus dem Grundkönnen aufnehmen

Voraussetzung: Übungsteile im Unterricht (Lernangebote)

Empfehlung: Schulinterne/Zentrale Abschlussklausur für Klasse 10 sollte ein Drittel Grundkönnen aus Klasse 7-10 enthalten

Beispiel für ein Lernprotokoll (Klasse 10 - Exponentialfunktionen):

1. *Einführungsbeispiel erläutern*
- 2a) *Wie stellt man zum gegebenen Graphen einer Exponentialfunktion eine Gleichung auf?
(Zeichnung vorgegeben)
Vorgehen beschreiben*
- 2b) *Welchen Einfluss haben die Parameter einer Exponentialfunktion auf den Verlauf des Graphen?
Fälle unterscheiden*
3. *Welche Fehler können passieren, wenn man Sachverhalte mit Exponentialfunktionen beschreiben möchte?*
4. *Gib ein eigenes Beispiel für einen exponentiellen Zusammenhang an (mit Schaubild) und eins, das nicht so beschrieben werden kann!*

Schülersicht:

1. **Orientierungshilfe** für das, was wichtig ist (Fokussierung)
2. **Vergewisserung** über den eigenen Lernstand ohne Bewertungsdruck

Lehrersicht:

3. **Standortklärung** bzgl. einer langfristigen Zielstellung (auch: Ausgangsniveausicherung und Klärung des Zielverständnisses)

Beispiel für ein Lernprotokoll (Klasse 11 - Ableitungsbegriff):

1. (*Einführungsbeispiel erläutern*)
- 2a) Wie kann man mathematisch den Weg von der lokalen Änderungsrate einer Funktion zur Steigung in einem Punkt beschreiben?
- 2b) *Was gibt die Ableitungsfunktion einer Funktion an, mit der die Füllhöhe eines Glases in Abhängigkeit von der Zeit beschrieben wird?*
3. Welche Fehler können passieren, wenn man Ableitungen von Funktionen ermitteln möchte?
4. Wann kann man die Ableitungsregel.... anwenden und wann nicht? Gib jeweils ein Beispiel an!
Wovon hängt es ab, ob man überhaupt eine Ableitungsfunktion bilden kann? (Existenz, Eindeutigkeit)

Argumente für Lernprotokolle zu Beginn oder am Ende einer Unterrichtsstunde – ohne Hilfsmittel:

- alle Lernenden werden angesprochen und gefordert mit geringem Zeitaufwand
- Verbalisierung von Vorstellungen
- Verständnisprobleme können frühzeitig erkannt und „repariert“ werden

Empfehlung

- Das erste Lernprotokoll einsammeln und kommentieren, aber nicht bewerten – jedoch mit der Klasse besprechen und gemeinsam Konsequenzen ziehen...

Unterrichtsrealität und Folgerungen:

- Zu wenig kreativitätsfördernde Anforderungen

Flexibles Arbeiten mit Aufgaben:

Aufgaben abwandeln, erweitern, auswählen,
finden, gruppieren, vergleichen, werten...

- Es genügt nicht, die Lernenden mit geeigneten Aufgaben nur zu konfrontieren und darauf zu hoffen, dass diese dann auch gelöst werden (können)!

Heuristische Bildung

- Kurzschrittig geführtes unreflektiertes Lernen behindert die Anwendungsfähigkeit und Verfügbarkeit des Wissens

Lernumgebungen für nachhaltiges Lernen:
Themenfelder...

Quellennachweis:

Winter, H. : Mathematikunterricht und Allgemeinbildung, In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik Nr. 61, 1995, S. 37-46

Ferner sei verwiesen auf Bruder , Regina:

Lernen, geeignete Fragen zu stellen. Heuristik im Mathematikunterricht. In: mathematik lehren 115 (2002), S.4 - 8

Mathematik lernen und behalten. In: Heymann, H.-W. (Hrsg.): Lernergebnisse sichern. PÄDAGOGIK 53 (2001), Heft 10, S. 15 -18

Verständnis für Zahlen, Figuren und Strukturen. In: Heymann, H.-W.(Hrsg.): Basiskompetenzen vermitteln. PÄDAGOGIK 53 (2001), Heft 4, S.18-22

Konzepte für ein ganzheitliches Unterrichten.- In: mathematik lehren 101 (2000), S. 4 - 11

Mit Aufgaben arbeiten.- In: mathematik lehren 101(2000), S. 12 - 17

Eine akzentuierte Aufgabenauswahl und Vermitteln heuristischer Erfahrung - Wege zu einem anspruchsvollen Mathematikunterricht für alle.-In: Flade/Herget (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen nach TIMSS - Anregungen für die Sekundarstufen.- Volk und Wissen 2000

Elementares Können wachhalten. Führerscheine im Mathematikunterricht.Friedrich Jahresheft 2000, S.101-104

www.math-learning.com